Aufgabe 1. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_x + bu_y = c,$$

mit Konstanten b, $c \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von b und c die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) Überprüfen Sie, ob das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_x + u_y &= 1 \qquad \text{für } (x, y) \in \Omega := (0, 1)^2, \\ u &= 1 \qquad \text{für } (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

eine auf $[0, 1]^2$ stetige Lösung besitzt, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

6 Punkte

Aufgabe 2. a) Wie ist für einen Differenzialoperator L die Fundamentallösung definiert?

b) Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}$

$$E(x) := e^{-ax} H(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

mit der Heaviside Funktion

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

eine Fundamentallösung für den Differentialoperator L mit

$$Lu := \frac{d}{dx} u + au$$

ist.

4 Punkte

Aufgabe 3. Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$|f(x)| \leq (1 + |x|^2)^m \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n$$

und ein $m \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt.

4 Punkte

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f(t) := e^{-|t|}$.

4 Punkte

Aufgabe 5. Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Zur numerischen Lösung betrachten wir das Jacobi-Verfahren.

a) Finden Sie obere Schranken für den Spektralradius und die Norm der zugehörigen Jacobi-Iterationsmatrix M in einer Matrixnorm ihrer Wahl.

b) Zeigen Sie, dass für dieses Problem die Jacobi-Iteration gegen die Lösung konvergiert.

c) Berechnen Sie die Lösung näherungsweise, indem Sie 2 Schritte des Jacobi-Verfahrens ausgehend von $x^0 = [0; 0; 0]$ durchführen.

6 Punkte

Aufgabe 6. Zur näherungsweisen Berechnung eines n-dimensionalen Gleichungssystems $Ax = b$ betrachten wir das Gauß-Seidel Verfahren.

a) Formulieren Sie einen Schritt des Verfahren im Pseudo-Code.

b) Wie groß ist der Aufwand eines Schrittes, falls A vollbesetzt ist?

4 Punkte

Aufgabe 7. Sei f eine reellwertige, 2π-periodische, Lipschitz stetige Funktion. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

a) Sei $f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$ die Fourier-Reihe von f. Dann gilt die diskrete Plancherel Formel

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k^2 + b_k^2] .$$

b) Sei $x_k = 2\pi k/n$, $0 \leq k < n$ und $f_k = f(x_k)$. Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$, und bezeichne d_k die diskreten Fourierkoeffizienten, dann gilt $d_k = d_{n-k} = \overline{d_k}$.

4 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben sei das Problem

$$u_x + u = f \quad \text{auf} \quad (0,1), \qquad u(0) = 0.$$

Zur numerischen Lösung betrachten Sie die Finite Differenzen Methode auf äquidistantem Gitter $\omega_h := \{x_j := jh : 0 < j \leq n\}$, $h := 1/n$. Zur Diskretisierung des Differenzialterms verwende man den Rückwärtsdifferenzenquotienten $u_x(jh) \sim \frac{1}{h}[u_{j+1} - u_j]$ mit $u_j := u(x_j)$.

a) Zeigen Sie, dass das diskrete Schema folgende Stabilitätsabschätzung erfüllt:

$$\frac{h}{2}\|u\|_{1,h}^2 + \|u\|_{0,h}^2 + \frac{1}{2}u_n^2 \leq \|f\|_{0,h}^2$$

mit den diskreten Normen $\|u\|_{0,h} := h\sum_{j=1}^{n} u_j^2$, $\|u\|_{1,h} := h\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{u_j - u_{j-1}}{h}\right)^2$.
u und f bezeichnen hier jeweils auch die Vektoren der Diskretisierung.

b) Überprüfen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.

c) Geben Sie für $f = 1$ und $n = 5$ das Gleichungssystem an, und lösen Sie dieses.

6 Punkte

Notenspiegel: insgesamt sind 38 Punkte zu erreichen
4(18), 3.7(20), 3.3(22), 3.0(24), 2.7(26), 2.3(28), 2.0(30), 1.7(32), 1.3(34), 1.0(36)