



Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

**Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2025
 Klausur | 19.3.2026**

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät (permanente Tinte, kein Bleistift, kein Rotstift).
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Kopien und Druckerzeugnisse sind nicht gestattet.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 02.04.2026 von 10:00 - 11:00 Uhr im Rogowski, KIPhys (1090|334) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanks-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: _ _ _ _ _

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	9	6	5	5	5	6	6	8	50
Ihre Punkte									

Klausur
+ Bonus
= Gesamt

+=

Note:

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left((u'(x))^2 + V(x)(u(x) - 1)^2 + \frac{\alpha}{2}(u(x))^4 \right) dx$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, $V \in C^1([0, 1])$ eine gegebene Funktion und

$$D := \{u \in C^2([0, 1]) : u(0) = u(1) \text{ und } u'(0) = u'(1)\}$$

ist.

- (a) Sei $v \in D$. Berechnen Sie die erste Variation von F im Punkt u in die Richtung v .
- (b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen von F genügen.
- (c) Geben Sie für $\alpha = 0$ und $V(x) = 1$ eine Lösung der Differentialgleichung mit den durch D vorgegebenen Randbedingungen an.
- (d) Ist die Menge D konvex? Ist für $V(x) = 1$ und $\alpha \geq 0$ das Funktional F konvex?

1,5+1,5+3+3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

- a) Sei $F : R := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zwei mal stetig differenzierbare Funktion und $f(x, y) := \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$. Zeigen Sie:

$$\int_R f(x, y) d(x, y) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c).$$

- b) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionsfolge mit $f_n \in L^1(0, 1) \cap L^2(0, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- 1) $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$ impliziert $\|f_n\|_2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$,
- 2) $\|f_n\|_2 \rightarrow 0$ impliziert $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

- c) Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar und $\lambda(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass $L^q(X; \mathbb{R}) \subset L^p(X; \mathbb{R})$ für $1 \leq p < q < \infty$, indem Sie

$$\|f\|_p \leq \lambda(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q \quad \text{für alle } f \in L^q(X; \mathbb{R}),$$

herleiten.

Hinweis: Betrachten Sie $\|f\|_p^p$ und nutzen Sie die Hölder Ungleichung mit geeigneten Exponenten p', q' .

1+3+2 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2z, 2y).$$

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^1 -Kurve mit

$$\gamma(0) = \gamma(1).$$

- Zeigen Sie, dass f ein Gradientenfeld ist und bestimmen Sie ein Potential ϕ mit $f = \nabla\phi$.
- Berechnen Sie $\int_{\gamma} f \cdot dx$ für eine beliebige geschlossene Kurve γ .
- Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $f = \nabla\phi$ mit $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3)$, so gilt für jede geschlossene C^1 -Kurve γ

$$\int_{\gamma} f \cdot dx = 0.$$

2+1+2 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 4.Sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} (n/\sqrt{x}) \sin(x/n), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $\{f_n\} \subset L^1([0, 1])$.
- (b) Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert gegen die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Sinne der punktweisen Konvergenz und der
- (c) gleichmäßigen Konvergenz.
- (d) Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert gegen f in $L^1([0, 1])$.

Hinweis:

- $|\sin(t)| \leq |t|$.
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$.

1+1+2+1 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Für die skalare gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) = f(t, x), \quad t \geq 0,$$

ist für eine gleichmäßige Schrittweite $h > 0$ das Ralston-Verfahren zweiter Ordnung durch folgende Vorschrift gegeben:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{4} \left(f(t_n, x_n) + 3f\left(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3}f(t_n, x_n)\right) \right).$$

- Führen Sie für $f(t, x) = tx$ und $x_0 = 3$ einen Schritt des Verfahrens mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ durch.
- Stellen Sie das Ralston-Verfahren in einem zweistufigen Butcher-Tableau dar.
- Prüfen sie durch Nachrechnen per Taylor-Entwicklung, dass die Konsistenzordnung des Verfahrens zwei beträgt.

1+1+3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ordnungsbedingungen für RK-Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 \\ \hline & b_1 & \frac{1}{4} \end{array}$$

die Parameter b_1, c_2, a_{21} so, dass das Verfahren invariant gegen Autonomisierung und konsistent von mindestens 2. Ordnung ist. Ist das Verfahren von 3. Ordnung? Begründen Sie.

- b) Betrachten Sie das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion R des zugehörigen RK-Verfahrens. Ist das Verfahren A -Stabil? Ist es L -Stabil?

3+3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Begründen Sie, warum A nur reelle Eigenwerte hat. Geben Sie mit Hilfe des Satzes von Gershgorin eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert und eine obere Schranke für den größten Eigenwert von A an.
- b) Benutzen Sie die folgende QR-Zerlegung

$$A_0 = A = QR = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

um einen Schritt des QR-Verfahrens zur Eigenwertberechnung auszuführen. Dieser Schritt liefert die Matrix A_1 . Welche Näherungen an die Eigenwerte von A ergeben sich daraus?

- c) Wenden Sie jetzt den Satz von Gerschgorin auf die Matrix A_1 aus Teil b) an und nutzen Sie das Ergebnis um den maximalen Fehler der Näherungen aus Teil b) zu ermitteln.

Tipp: Sie dürfen die folgende Aussage ohne Beweis verwenden:

Falls sich die Gerschgorin-Kreise einer Matrix nicht schneiden, enthält jeder der Kreise genau einen Eigenwert dieser Matrix.

1,5+2+2.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Betrachten Sie die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$ mit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ und das Abstiegsverfahren $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$ mit Abstiegsrichtung $d^{(k)}$ und Schrittweite α_k .

- Geben Sie die Abstiegsrichtung für das Verfahren des steilsten Abstiegs und für das Newton-Verfahren für die Funktion φ an.
- Angenommen A sei symmetrisch, welche Bedingungen an A müssen im Fall des Newton-Verfahrens gelten, damit $d^{(k)}$ tatsächlich eine Abstiegsrichtung ist?
- Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = (-3, 6)^T$ und $c = 0$. Zeigen Sie, dass die Bedingungen aus (b) erfüllt sind.
- Mit den konkreten Angaben aus (c) ergibt sich das Minimum $(x^*, y^*) = (4, -2)$. Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = (0, 0)^T$ jeweils einen Schritt mit dem Verfahren des steilsten Abstiegs und dem Newton-Verfahren durch. Halbieren Sie die Schrittweite $\alpha_0 = 1$ bis $\varphi(x^{(1)}) < \varphi(x^{(0)})$ gilt.
- Was fällt Ihnen am Ergebnis des Newton-Schrittes auf? Haben Sie eine Erklärung dafür?

1,5+2+1+2+1,5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Name:

Mat-Nr.:

