Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Vertr.-Prof. Dr. Aleksey Sikstel
Dr. Lambert Theisen
Donat Weniger

Applied and Computational Mathematics

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2024/2025
Klausur | 12.03.2025

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät (permanente Tinte, kein Bleistift, kein Rotstift).
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Kopien und Druckerzeugnisse sind nicht gestattet.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 31.03.2025 von 10:00 - 10:30 Uhr im Hauptgebäude, Hörsaal V (1010|213) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	6.5	6.5	6	5	8	6	6	50
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional F mit

$$F : \begin{cases} D \to \mathbb{R}, \\ y \mapsto F(y) = \int_{-1}^{1} y(x) \log\big(y(x)\big)\, dx, \end{cases}$$

und $D = \{w \in C^2[-1,1] : w(x) \geq \frac{1}{2e}\}$. Dabei bezeichnet log den natürlichen Logarithmus.

a) Ist D konvex? Ist F konvex? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Geben Sie eine Gleichung an, der die Extremale des Funktionals F genügen.

c) Bestimmen Sie einen Kandidaten für ein Extremum. Liegt ein globales Extremum vor? Begründen Sie ihre Antwort.

2.5+2.5+1 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Sei $F: R := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zwei mal stetig differenzierbare Funktion und $f(x,y) := \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$. Zeigen Sie:

$$\int_R f(x,y) d(x,y) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c).$$

b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionsfolge mit $f_n \in L^1(0,1) \cap L^2(0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1) $\|f_n\|_1 \to 0$ impliziert $\|f_n\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$,
2) $\|f_n\|_2 \to 0$ impliziert $\|f_n\|_1 \to 0$ für $n \to \infty$.

c) Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar und $\lambda(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass $L^q(X;\mathbb{R}) \subset L^p(X;\mathbb{R})$ für $1 \leq p < q < \infty$, indem Sie

$$\|f\|_p \leq \lambda(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q \quad \text{für alle} \quad f \in L^q(X;\mathbb{R}),$$

herleiten.

Hinweis: Betrachten Sie $\|f\|_p^p$ und nutzen Sie die Hölder Ungleichung mit geeigneten Exponenten p', q'.

1.5+2+3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Sei $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))^T$ eine Parametrisierung und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ein Gebiet mit äußerer Normale $\nu(x, y) = (x, y)^T$. Betrachten Sie die Felder

$$F(x, y) = (2x, y)^T,$$
$$G(x, y) = \frac{1}{|x^2 + y^2|}(-y, 2x)^T.$$

a) Berechnen Sie die Arbeitsintegral $\int_\gamma F \cdot dx$ sowie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \cdot \nu dx$.

b) Berechnen Sie die Arbeitsintegral $\int_\gamma G \cdot dx$ sowie das Kurvenintegral $\int_\gamma G \cdot \nu dx$.

c) Überprüfen Sie den Satz von Gauß für F, d.h. die Identiät

$$\int_B \text{div}(F) dS = \int_\gamma F \cdot \nu dx.$$

d) Sind F und G konservative Vektorfelder? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.5+1.5+1.5+2 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

Sei P die Fläche

$$P := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 3,\ x_1^2 + x_2^2 < 3\right\}.$$

(a) Finden Sie eine Parametrisierung für P.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|P|$.

(c) Sei M das Volumen zwischen der Fläche P und der Ebene $\{x_3 = 0\}$. Wenden Sie den Satz von Gauß an, um

$$\int_M \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx$$

zu berechnen.

Hinweis: Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) := (0, 0, x_3 \sin(x_1^2 + x_2^2))^\top$.

1+2.5+2.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Vorgelegt sei das folgende Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

(a) Führen Sie für das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t \ \sin(x(t))$$
$$x(0) = \frac{\pi}{2}$$

und die Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{2}$ einen Schritt des durch das Butcher-Tableau gegebenen Runge-Kutte-Verfahrens aus.

(b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens aus (a) direkt durch Taylorentwicklung.

(c) Konvergiert das Verfahren aus (a) für $\Delta t \to 0$ gegen die exakte Lösung des AWPs? Begründen Sie ihre Antwort.

2+2+1 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

Für die gewöhnliche Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ betrachten wir das Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n) \\ k_2 &= f(t_n + \alpha\Delta t, x_n + \alpha\Delta t k_1) \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta t\,((1-\beta)k_1 + \beta k_2) \end{aligned}$$

mit Parameter $\alpha, \beta > 0$.

a) Geben Sie das Butcher-Schema des Verfahrens an. Wieviel Stufen hat die RK-Methode?

b) Welche Bedingungen an α, β müssen für die Konsistenzordnung $p = 2$ gelten?

c) Für allgemeine Werte von α, β ergibt sich für das Zeitschrittverfahren die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = 1 + z + \gamma\, z^2$$

mit Parameter γ. Geben Sie den Zusammenhang zwischen γ und α, β an.

d) Wir suchen nun ein Verfahren vom obigen Typ, welches die ODE $x'(t) = \lambda\, x(t)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$ mit möglichst großem Zeitschritt stabil integriert. Dazu berechnen wir ein passendes γ. Für $\gamma > 0$ ist die Funktion $g(z)$ eine nach oben geöffnete Parabel durch den Punkt $(0, 1)$ und mit Minimum bei $z_{\text{min}} = -\frac{1}{2\gamma}$. Für welche γ liegt der *Wert* $g(z_{\text{min}})$ des Minimums zwischen -1 and 1? Welche Zeitschrittbeschränkung für Δt ergibt sich für ein solches Verfahren bei einem reellwertigem λ? Und für welchen Wert von γ ist die Beschränkung dann am geringsten?

> **Hinweis:** Machen Sie eine Skizze von $g(z)$ und benutzen Sie die Symmetrie der Parabel bezüglich des Scheitelpunkts.

e) Betrachten Sie nun das konkrete Verfahren mit $\alpha = 1$ und $\beta = \frac{1}{4}$. Führen Sie zwei Schritte mit diesem Verfahren für die ODE $x'(t) = \lambda\, x(t)$ mit $\lambda = -2$ und $\Delta t = 1$ ausgehend von $x(0) = 1$ durch. Was beobachten Sie? Ist das Verhalten durch die Stabilitätsfunktion erklärbar?

1+1+1.5+3+1.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 & -0.5 \\ 0.2 & 3 & 0.5 \\ -0.4 & 0.1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gershgorin eine möglichst kleine Menge an, in der die Eigenwerte von A enthalten sind.

> **Hinweis:** Betrachten Sie auch die Matrix A^T, eine Ähnlichkeitstransformation ist nicht notwendig.

b) Sie möchten den betragsmäßig größten Eigenwert der Matrix A mittels der Vektoriteration bestimmen. Geben Sie Schranken für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens an.

> **Hinweis:** Nutzen Sie die Erkenntisse aus Teil a).

c) Es soll nun der Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert von A ebenfalls iterativ bestimmt werden. Geben Sie dazu ein geeignetes Verfahren und die benötigten Startwerte an.

> **Hinweis:** Nutzen Sie die Erkenntisse aus Teil a).

d) Gegeben sei nun die Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Führen Sie mit B zwei Schritte der einfachen Vektoriteration zur Berechnung von $(\vec{x}_k, \lambda_k)$ $(k = 1, 2)$ für den Startvektor $\vec{x}_0 = (1, 0, 1)^T$ aus.

2+1+1+2 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Betrachten Sie die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ und das Abstiegsverfahren $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$ mit Abstiegsrichtung $d^{(k)}$ und Schrittweite α_k.

a) Geben Sie die Abstiegsrichtung für das Verfahren des steilsten Abstiegs und für das Newton-Verfahren für die Funktion φ an.

b) Welche Bedingungen an A müssen im Fall des Newton-Verfahrens gelten, damit $d^{(k)}$ tatsächlich eine Abstiegsrichtung ist?

c) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = (-3, 6)^T$ und $c = 0$. Schätzen Sie mit dem Satz von Gerschgorin die Eigenwerte von A ab und zeigen Sie, dass die Bedingungen aus (b) erfüllt sind.

d) Mit den konkreten Angaben aus (c) ergibt sich das Minimum $(x^\star, y^\star) = (4, -2)$. Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = (0, 0)^T$ jeweils einen Schritt mit dem Verfahren des steilsten Abstiegs und dem Newton-Verfahren durch. Halbieren Sie die Schrittweite $\alpha_0 = 1$ bis $\varphi(x^{(1)}) < \varphi(x^{(0)})$ gilt.

e) Was fällt Ihnen am Ergebnis des Newton-Schrittes auf? Haben Sie eine Erklärung dafür?

1+1.5+1+2+0.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.: