Vertr.-Prof. Dr. Michael Schlottke-Lakemper
Dr. Robert Speck
Lukas Netterdon
Ullika Scholz

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2023/2024
Klausur | 11.03.2024

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 25.03.2024 von 12:00 - 13:00 Uhr im Rogowski-Gebäude, kleine Physik (1090|334) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	7	6	6	6	5	6	5	9	50
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional $F : D \to \mathbb{R}$ mit

$$F(u) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(u'(x))^2 + \frac{1}{2}(u(x))^2 + \frac{\alpha}{4}(u(x) - 1)^4 \right) dx$$

und

$$D := \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

(a) Sei $v \in D$. Berechnen Sie die erste Variation von F im Punkt u in Richtung v.

(b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen von F genügen.

(c) Geben Sie für $\alpha = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung mit den durch D vorgegebenen Randbedingungen an.

(d) Für welche Werte von $\gamma \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$G_\gamma := \left\{ u \in C^0([a,b]) : \int_a^b u(x)dx = \gamma \right\}$$

konvex?

(e) Zeigen Sie, dass die Menge

$$G := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(x^2, (x-2)^2 + 2) \leq y \right\}$$

konvex ist.

2+2+1+1+1 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

Sei Γ die Kurve mit der Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.
Hinweis:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right)$$

b) Welches dieser Vektorfelder

$$F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 2x_1^3 x_2^2 \exp(x_1^4 x_2^2) \\ x_1^4 x_2 \exp(x_1^4 x_2^2) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad G(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

besitzt ein Potential? Berechnen Sie dieses Potential.

c) Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $\int_\Gamma F \cdot dx$ beziehungsweise $\int_\Gamma G \cdot dx$. Sie dürfen das Potential benutzen.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 3.

Betrachten Sie die folgenden Funktionen auf $\Omega = (0,1)$:

$$f : \Omega \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$$
$$g : \Omega \mapsto \mathbb{R},\ g(x) = e^x + \sqrt{x}$$

(i) Geben Sie eine Funktion $h(x)$ an, für die gelten soll, dass $h \neq f$ und $h \simeq f$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$f \simeq g \Leftrightarrow f = g \text{ fast überall auf } \Omega.$$

(ii) Für welches $1 \leq p \leq \infty$ ist $f \in L^p(\Omega),$ für welches p ist $g \in L^p(\Omega)$?

(iii) Für welches p ist $f + g \in L^p(\Omega)$?

(iv) Ist $f \cdot g \in L^1(\Omega)$?

(v) Für welche p ist $g' \in L^p(\Omega)$?

1+2+1+1+1 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^2 \\ zx^2 \end{pmatrix}$$

sowie die Einheitskugel

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\} \ .$$

(a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial V} f \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma$$

wobei ∂V den Rand von V bezeichnet und ν der nach außen zeigende Normalenvektor auf ∂V ist.

(b) Überprüfen Sie den Satz von Stokes

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x = \int_F \mathrm{rot}\, f \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma$$

für $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } y \geq 0\}$ mit $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ der Randkurve von F.

2+4 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Ein implizites Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $s = 2$ habe das folgende Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & c_1 & c_2 \end{array}$$

(a) Geben Sie die allgemeine Form eines impliziten Verfahrens mit $s = 2$ Schritten an.

(b) Welche Anforderungen an a_{ij}, b_i und c_i (für $i, j \in \{1, 2\}$) müssen erfüllt sein, damit das Verfahren erster Ordnung ist? Leiten Sie diese mithilfe einer Taylor-Entwicklung her!

(c) Welche Anforderungen an a_{ij}, b_i and c_i (für $i, j \in \{1, 2\}$) müssen erfüllt sein, damit das Verfahren zweiter Ordnung ist? Leiten Sie auch diese her!

(d) Zeigen Sie, dass das Verfahren gegeben durch das Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 2/5 & 1/10 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

ein Verfahren zweiter Ordnung ist.

1+2+1+1 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

Betrachten Sie für $\theta \in [0, 1]$ das Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + (1 - \theta)hf(y_n) + \theta hf(y_{n+1})$$

a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion dieses Verfahrens.

b) Wie sehen den die Stabilitätsgebiete von diesem Verfahren für $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ und für $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$ aus? Interpretieren Sie die Gebiete geometrisch. Hinweise:

- Teilen Sie an geeigneter Stelle durch $(1 - 2\theta)$ und ergänzen die binomische Formel. Beachten Sie, dass dieser Faktor je nach θ negativ sein kann!
- Nutzen Sie die Binomische Ergänzung: $x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$

c) Welches Verfahren entsteht für den Spezialfall $\theta = \frac{1}{2}$ und wie sieht dann das Stabilitätsgebiet aus?

d) Für welche $\theta \in [0, 1]$ ist das Verfahren A-stabil?

2+2+1+1 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 9$, mit dazugehörigem Eigenvektor $(0, 1, 0)^T$, $\lambda_2 = 36$ mit dazugehörigem Eigenvektor $(1, 0, 1)^T$ und $\lambda_3 = -4$ mit dazugehörigem Eigenvektor $(1, 0, -1)^T$.

a) Führen Sie einen Schritt der Vektoriteration mit dem Startvektor x_0 in Richtung $(1, 1, 1)^T$ aus. Geben Sie die Näherungswerte für den Eigenwert und Eigenvektor nach dem ersten Iterationsschritt an. Gegen welchen Eigenwert konvergiert die Methode?

b) Führen Sie einen Schritt der inversen Vektoriteration mit dem Startvektor x_0 in Richtung $(1, 1, 1)^T$ und für den geschätzten Eigenwert $\lambda = 8$ aus. Geben Sie die Näherungswerte für den Eigenwert und Eigenvektor nach dem ersten Iterationsschritt an. Gegen welchen Eigenwert konvergiert die Methode?

3+2 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Betrachten Sie die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ und das Abstiegsverfahren $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$ mit Abstiegsrichtung $d^{(k)}$ und Schrittweite α_k.

a) Geben Sie die Abstiegsrichtung für das Verfahren des steilsten Abstiegs und für das Newton-Verfahren für die Funktion φ an.

b) Welche Bedingungen an A müssen im Fall des Newton-Verfahrens gelten, damit $d^{(k)}$ tatsächlich eine Abstiegsrichtung ist?

c) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = (-3, 6)^T$ und $c = 0$. Schätzen Sie mit dem Satz von Gerschgorin die Eigenwerte von A ab und zeigen Sie, dass die Bedingungen aus (b) erfüllt sind.

d) Mit den konkreten Angaben aus (c) ergibt sich das Minimum $(x^\star, y^\star) = (4, -2)$. Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = (0, 0)^T$ jeweils einen Schritt mit dem Verfahren des steilsten Abstiegs und dem Newton-Verfahren durch. Halbieren Sie die Schrittweite $\alpha_0 = 1$ bis $\varphi(x^{(1)}) < \varphi(x^{(0)})$ gilt.

e) Was fällt Ihnen am Ergebnis des Newton-Schrittes auf? Haben Sie eine Erklärung dafür?

2+2+2+2+1 Punkte

Name: Mat-Nr.: