Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Dr. Robert Speck
Tuan Vo
Edilbert Christhuraj

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2022
Klausur | 13.03.2023

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 22.03.2023 von 14:00-16:00 Uhr im Hauptgebäude Hörsaal I (1010|101) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	5	5	8	7	8	6	5	6	50
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional F mit

$$F : \begin{cases} D \to \mathbb{R}, \\ y \mapsto F(y) = \int\limits_{-1}^{1} y(x) \log\big(y(x)\big)\, dx, \end{cases}$$

und $D = \left\{ w \in C^2[-1,1] : w(x) \geq \frac{1}{2e} \right\}$. Dabei bezeichnet log den natürlichen Logarithmus.

a) Ist D konvex? Ist F konvex?

b) Geben Sie eine Gleichung an, der die Extremale des Funktionals F genügen.

c) Bestimmen Sie einen Kandidaten für ein Extremum. Liegt ein globales Extremum vor?

2+2+1 Punkte

Aufgabe 2.

a) Berechnen Sie die Gesamtmasse M der Helix $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$ mit Dichtefunktion ρ

$$\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \\ (t) \mapsto \gamma(t) = \Big(\cos(t), \sin(t), ht \Big)^T, \end{cases} \qquad \text{und} \quad \rho : \begin{cases} \Gamma \to \mathbb{R}, \\ (x, y, z) \mapsto \rho(x, y, z) := z. \end{cases}$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Paraboloiden

$$P = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = x^2 + y^2,\, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

2+3 Punkte

Name: Matriculation-Nr.:

Aufgabe 3.

Die *Hölder*-Ungleichung für Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\int_\Omega \Big| f(x)\, g(x) \Big| \, dx \leq \big\| f(x) \big\|_p \big\| g(x) \big\|_q \quad \text{mit} \quad p, q \in [1, \infty) \ \text{ und } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

a) Geben Sie die Definition der p-Norm für *Lebesgue*-integrierbare Funktionen an.

b) Beweisen Sie die *Hölder*-Ungleichung für stetigen Funktionen und $p = 1$.

c) Zeigen Sie mit der *Hölder*-Ungleichung, dass falls $p < q$ gilt für $u \in L^q(\Omega)$

$$\|u\|_p \leq \|u\|_q$$

wenn das Maß des Grundgebiets gleich eins ist, d.h. $|\Omega| = 1$.

> **Hinweis:** Wenden Sie zunächst die *Hölder*-Ungleichung an mit $\|fg\|_1 \leq \|f\|_{\tilde{p}} \|g\|_{\tilde{q}}$, wobei $f := |u|^p$ und $g := 1$, sowie $\tilde{p} = q/p$.

d) Geben Sie für $\Omega = [-1/2, 1/2] \subset \mathbb{R}$ eine Funktion an, die im Raum $L^p(\Omega)$ ist, aber nicht im Raum $L^q(\Omega)$ mit $q = p + 1$.

> **Hinweis:** Betrachten Sie eine Singularität $|x|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

2+2+2+2 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ wie folgt

$$\boldsymbol{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ (x, y) \mapsto \boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ y^2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

und gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Punkte $(0, 0), (1, 0)$ und $(1, 2)$.

a) Berechnen Sie das Arbeitsintegral entlang des Dreiecks.
Hat das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ ein Potential?

b) Formulieren Sie den Satz von *Gauss*, und
benennen Sie die jeweiligen Terme und Objekte.

c) Weisen Sie den Satz von *Gauss* anhand des obigen Vektorfeldes $\boldsymbol{f}$ und
dem Dreieck Ω nach.

3+1+3 Punkte

Aufgabe 5.

Betrachten Sie das System von Differentialgleichungen

$$y_1' = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\, y_1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\, y_2$$
$$y_2' = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\, y_1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\, y_2$$

für $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen diese Differentialgleichungen lösen:

$$y_1(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}$$
$$y_2(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} - C_2\, e^{\lambda_2 t}$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass das explizite Eulerverfahren die folgende Lösung liefert:

$$y_{1,n} = C_1(1 + h\lambda_1)^n + C_2(1 + h\lambda_2)^n$$
$$y_{2,n} = C_1(1 + h\lambda_1)^n - C_2(1 + h\lambda_2)^n$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

c) Welche Schrittweitenbeschränkung(en) hat der explizite Euler? Wie verhält sich die exakte Lösung aus a) und wie die numerische Lösung aus b) für $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -1000)$?

3+3+2 Punkte

Aufgabe 6.

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$x' = f(t,x) \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0.$$

Die Zeitdiskretisierung sei durch $t_j = jh$ gegeben. Gegeben sei das Einschrittverfahren

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f\left(t,x\right) \\ k_2 &= f\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f\left(t+h, x+hk_3\right) \\ \Psi(t,x,h) &= \frac{1}{6}k_1+\frac{1}{3}k_2+\frac{1}{3}k_3+\frac{1}{6}k_4 \end{aligned}}$$

a) Geben Sie das *Butcher*-Tableau des Verfahrens an.

b) Zeigen Sie, dass das Verfahren mit mindestens 2. Ordnung konvergiert.

c) Welche Konsistenzordnung kann es maximal haben?

d) Betrachten Sie die Gleichung mit $f(t,x) = \lambda x$ und berechnen Sie die Verstärkungsfunktion R, d.h. $x_{j+1} = R(h\lambda)x_j$.

1+2+1+2 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix A wie folgt

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie unter Verwendung des Satzes von *Gerschgorin* Abschätzungen für die Eigenwerte von der Matrix A an.

b) Führen Sie **zwei** Schritte der klassischen Vektoriteration mit dem Startvektor

$$x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$$

durch, und geben Sie eine Näherung für den betragsgrößten Eigenwert von A an.

2+3 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Funktion f wie folgt

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ (x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3. \end{cases}$$

a) Hat die Funktion f mindestens ein lokales/globales Minimum? Ist das Minimum global?

b) Gilt für $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dass

$$\boldsymbol{d}^{(k)} := -\nabla^2 f\big(\boldsymbol{x}^{(k)}\big)\nabla f\big(\boldsymbol{x}^{(k)}\big) \in \mathbb{R}^2$$

eine Abstiegsrichtung ist?

c) Wählen Sie $\boldsymbol{x}^{(0)} = (2,2)^\top$ und

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k\, \boldsymbol{d}^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie α_k, so dass es der *Wolfe*-Bedingung genügt. Konvergiert dann das obige Verfahren?

d) Definieren Sie die Menge

$$M := \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \|\boldsymbol{x}\|^2 \leq 1\Big\} \subset \mathbb{R}^2$$

und betrachten Sie

$$\boldsymbol{x}^\star := \arg\min_{\boldsymbol{x} \in M} f(\boldsymbol{x}).$$

Geben Sie die *Karush-Kuhn-Tucker* Bedingungen an.

1+1+2+2 Punkte

Name: Matriculation-Nr.:

Viel Erfolg!