Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Jun.-Prof. Dr. Sebastian Krumscheid

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2021
Klausur | 14.03.2022

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 14.04.2022 von 10:30-12:00 Uhr im TEMP2 (1515|002) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	7	7	4.5	6.5	6	5.5	6	7.5	50
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Gegeben ist das Funktional

$$F : C^1([0,1]) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto F[u] = \int_0^1 (u'(x))^2 dx$$

für eine skalare Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$.

a) Berechnen Sie einen Kandidaten für ein Extremum von F, indem Sie die erste Variation gleich Null setzen.

b) Untersuchen Sie die Konvexität von F. Ist das Ergebnis aus a) ein Maximum oder ein Minimum von F?

c) Es sei weiter das Funktional

$$G_1[u] = \int_0^1 u(x) dx$$

gegeben. Benutzen sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren um einen Kandidaten für ein Extremum von F mit der Nebenbedingung $G_1[u] = 1$ zu finden. Berechnen Sie zuerst die Extremal-Lösung und dann den Lagrange-Multiplikator mit Hilfe der Nebenbedingung.

Hinweis: Das zu minimierende Lagrange-Funktional ist gegeben durch

$$L[u, \lambda] = F[u] + \lambda\, G[u].$$

d) Es sei zuletzt noch das weitere Funktional

$$G_2[u] = \int_0^1 u(x)^2 dx$$

gegeben. Benutzen Sie wieder die Methode der Lagrange-Multiplikatoren um einen Kandidaten für ein Extremum von F mit der Nebenbedingung $G_2[u] = 1$ zu finden.

Hinweis:
Verwenden Sie bei der Berechnung des Integrals $\int \sin(\alpha x)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2\alpha x)}{4\alpha}$.

3+1+1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 2.
Es sei $\Omega := (0, \infty)$ und $x \in \Omega$.

a) Gegeben sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}, & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie $f \notin L^1(\Omega)$ aber $f \in L^2(\Omega)$.

b) Gegeben sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}, & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie $g \in L^1(\Omega)$ aber $g \notin L^2(\Omega)$.

c) Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung in der Form

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}},$$

um das folgende Integral abzuschätzen:

$$\int_\Omega \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^4}} e^{-\frac{2}{3}x} dx$$

2+2+3 Punkte

Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie die Gesamtmasse M der Helix

$$\Gamma = \gamma([0, 2\pi]), \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, ht)^T$$

mit folgender Dichtefunktion

$$\rho : \Gamma \to \mathbb{R}, \quad \rho(x, y, z) = z.$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Paraboloiden

$$S = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = x^2 + y^2, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

2+2.5 Punkte

Aufgabe 4.

Sei $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))^T$ eine Parametrisierung und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ein Gebiet mit äußerer Normale $\nu(x, y) = (x, y)^T$. Betrachten Sie die Felder

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= (x, 2y)^T, \\
G(x, y) &= \frac{1}{|x^2 + y^2|}(-2y, x)^T.
\end{aligned}
$$

a) Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma F \cdot dx$ sowie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \cdot \nu dx$.

b) Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma G \cdot dx$ sowie das Kurvenintegral $\int_\gamma G \cdot \nu dx$.

c) Überprüfen Sie den Satz von Gauß für F, d.h. die Identiät

$$
\int_B \operatorname{div}(F) dS = \int_\gamma F \cdot \nu dx. \tag{1}
$$

d) Sind F und G konservative Vektorfelder (Gradientenfelder)? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.5+1.5+1.5+2 Punkte

Name: Matriculation-Nr.:

Aufgabe 5.

Zur Approximation des Anfangswertproblems

$$y' = f(t,y), \qquad y(0) = y_0$$

sei ein Einschrittverfahren mit der Verfahrensvorschrift

$$\Psi(t,y,h) = \alpha\, f(t,y) + \frac{1}{4} f\big(t + \beta\, h, y + \gamma\, h\, f(t,y)\big)$$

gegeben.

a) Geben Sie das Runge-Kutta Tableau für dieses Verfahren an. Ist das Verfahren explizit oder implizit?

b) Für welche Werte von (α, β, γ) ist die Konsistenzordnung des Verfahrens mindestens 2?

c) Konvergiert das Verfahren mit den Werten für (α, β, γ) aus Teil b) für die Funktion $f(t,y) = t^2$?

d) Existieren Werte für (α, β, γ), so dass das Schema für die Funktion $f(t,y) = t^2$ von dritter Ordnung ist?

1+2+1+2 Punkte

Aufgabe 6.

Wir betrachten das lineare Mehrschrittverfahren

$$y_{j+2} + \alpha_1 y_{j+1} + c\, y_j = h\big(\beta_2 f_{j+2} + \beta_1 f_{j+1} + \beta_0 f_j\big)$$

wobei $f_j = f(t_j, y_j)$ und c ein frei zu wählender Parameter sei.

a) Bestimmen Sie α_1, β_2, β_1 und β_0 in Abhängigkeit von dem Parameter c, so dass das Verfahren konsistent von der Ordnung 3 ist.

b) Gibt es einen Wert für c, so dass das Verfahren konsistent von der Ordnung 4 ist?

c) Sei $\alpha_1 = -1 - c$. Für welche Werte von c ist das Verfahren null-stabil? Was können Sie über die Konvergenz des Verfahrens dann aussagen?

3+1+1.5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 & -0.5 \\ 0.2 & 3 & 0.5 \\ -0.4 & 0.1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gershgorin eine möglichst kleine Menge an, in der die Eigenwerte von A enthalten sind.
Hinweis: Betrachten Sie auch die Matrix A^T, eine Ähnlichkeitstransformation ist nicht notwendig.

b) Sie möchten den betragsmäßig größten Eigenwert der Matrix A mittels der Vektoriteration bestimmen. Geben Sie Schranken für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens an.
Hinweis: Nutzen Sie die Erkenntisse aus Teil a).

c) Es soll nun der Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert von A ebenfalls iterativ bestimmt werden. Geben Sie dazu ein geeignetes Verfahren und die benötigten Startwerte an.
Hinweis: Nutzen Sie die Erkenntisse aus Teil a).

d) Gegeben sei nun die Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Führen Sie mit B zwei Schritte der einfachen Vektoriteration zur Berechnung von $(\vec{x}_k, \lambda_k)$ $(k = 1, 2)$ für den Startvektor $\vec{x}_0 = (1, 0, 1)^T$ aus.

2+1+1+2 Punkte

Name: Matriculation-Nr.:

Aufgabe 8.
Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3.$$

a) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass

$$\nabla f(\vec{x}) = 2A\vec{x}, \quad \nabla^2 f(\vec{x}) = 2A.$$

b) Hat die Funktion f ein globales Minimum $\vec{x}^\star$?

c) Gilt für ein beliebiges $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{x}^\star\}$, dass

$$\vec{d}_k := -\big(\nabla^2 f(\vec{x}_k)\big)^{-1} \nabla f(\vec{x}_k) \in \mathbb{R}^2$$

eine Abstiegsrichtung ist?

d) Geben Sie die allgemeine Definition der Wolfe Bedingungen an.

e) Zeigen Sie, dass die Liniensuche

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha_k \vec{d}_k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

mit einer konstanten Schrittweite $\alpha_k = 1$ und $\vec{d}_k$ aus dem Aufgabenteil c) die Wolfe Bedingungen für alle k und beliebige $\vec{x}_0$ erfüllt.

f) Definieren Sie die Menge

$$M := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|\vec{x}\|_2^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

und betrachten Sie

$$\vec{x}^\star := \arg\min_{\vec{x} \in M} f(\vec{x}).$$

Geben Sie die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen für dieses Optimierungsproblem an.

1+1+1+1+2.5+1 Punkte

Name: Matriculation-Nr.:

Name: Matriculation-Nr.: