Prof. Dr. Benjamin Stamm
Jun.-Prof. Dr. Håkon Hoel

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2020
Klausur | 20.04.2021

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 11.05.2021 von 10:00-11:00 Uhr im Zoom Videokonferenz statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	7	5.5	6.5	6	5	9	5	6	50
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional $F : D \to \mathbb{R}$ mit

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left((u'(x))^2 + V(x)(u(x) - 1)^2 + \frac{\alpha}{2}(u(x))^4 \right) dx$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, $V \in C^1([0, 1])$ eine gegebene Funktion und

$$D := \{u \in C^2([0, 1]) : u(0) = u(1) \text{ und } u'(0) = u'(1)\}$$

ist.

(a) Sei $v \in D$. Berechnen Sie die erste Variation von F im Punkt u in die Richtung v.

(b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen von F genügen.

(c) Geben Sie für $\alpha = 0$ und $V(x) = 1$ eine Lösung der Differentialgleichung mit den durch D vorgegebenen Randbedingungen an.

(d) Ist die Menge D konvex? Ist für $V(x) = 1$ und $\alpha \geq 0$ das Funktional F konvex?

1.5+1.5+2+2 Punkte

Aufgabe 2.

Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x^2}{n}\right), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\{f_n\} \subset L^1([0,1])$.

(b) Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert gegen die Funktion $f(x) = x$ im Sinne der punktweisen Konvergenz und der

(c) gleichmäßigen Konvergenz.

(d) Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert gegen f in $L^1([0,1])$.

Hinweis:

- $|\sin(t)| \leq |t|$.
- $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.

1+1+2+1.5 Punkte

Aufgabe 3.

Sei $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))^T$ eine Parametrisierung und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ein Gebiet mit äußerer Normale $\nu(x, y) = (x, y)^T$. Betrachten Sie die Felder

$$F(x,y) = (2x, y)^T,$$
$$G(x,y) = \frac{1}{|x^2 + y^2|}(-y, 2x)^T.$$

a) Berechnen Sie die Arbeitsintegral $\int_\gamma F \cdot dx$ sowie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \cdot \nu dx$.

b) Berechnen Sie die Arbeitsintegral $\int_\gamma G \cdot dx$ sowie das Kurvenintegral $\int_\gamma G \cdot \nu dx$.

c) Überprüfen Sie den Satz von Gauß für F, d.h. die Identiät

$$\int_B \text{div}(F) dS = \int_\gamma F \cdot \nu dx. \tag{1}$$

d) Sind F und G konservative Vektorfelder? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.5+1.5+1.5+2 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben seien die Flächen $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0\right\},$$
$$F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0\right\},$$

sowie das Vektorfeld $f \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \left(\sqrt{y^2+z^2}, xe^{y^2}, \arctan x\right).$$

a) Berechnen Sie die Oberflächennormalen ν_i zu F_i, ($i \in \{1,2\}$). Die Oberflächennormalen ν_i sein mit einer positiven ersten Komponente definiert.

b) Bestimmen Sie $\int_{F_i} \mathrm{rot} f \cdot \nu \, d\sigma$, für $i \in \{1,2\}$.

3+3 Punkte

Aufgabe 5.

Für die skalare gewöhnliche Differentialgleichung (ODE)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x) \qquad t \geq 0 \\ x(0) &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

ist für eine gleichmäßige Schrittweite $h > 0$ das Ralston-Verfahren zweiter Ordnung durch folgende Vorschrift gegeben:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{4}\left(f\Big(t_n,\ x_n\Big) + 3f\Big(t_n + \frac{2h}{3},\ x_n + \frac{2h}{3}f(t_n, x_n)\Big)\right).$$

(a) Führen Sie für $f(t,x) = tx$ und $h = 1/2$ eine Iteration des Verfahrens an ODE (1) durch.

(b) Stellen Sie das Ralston-Verfahren in einem zweistufigen Butcher-Tableau dar.

(c) Prüfen sie durch Nachrechnen per Taylor-Entwicklung, dass die Konsistenzordnung des Verfahrens [Eng: order of a method] zwei beträgt.

1+2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.
Wir betrachten numerische Verfahren mit den folgenden Butcher-Tableaus

$$\textbf{Heun:} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

und

$$\textbf{Crank-Nicolson:} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

(a) Ist das Heun-Verfahren explizit oder implizit? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist Crank-Nicolson explizit oder implizit? Begründen Sie auch hier Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass die Stabilitätsfunktion des Heun-Verfahrens

$$R(z) = 1 + z + z^2/2$$

lautet.

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass die Stabilitätsfunktion [Eng: amplification function, stability function] durch

$$R(\lambda h) = \frac{x_{j+1}}{x_j}$$

gegeben ist, wobei x_j und x_{j+1} die Punkte nach j bzw. $j+1$ Schritten des Verfahrens angewendet auf Dahlquists Testgleichung

$$\dot{x} = \lambda x \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

sind.

(d) Definieren Sie A-Stabilität. Ist das Heun-Verfahren A-stabil?

(e) Für das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \qquad x(0) \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

sei $x_n^H \approx x(nh)$ die Bezeichnung für die n-te Iteration mit dem Heun-Verfahren unter Verwendung einer gleichmäßigen Schrittweite $h > 0$. In welchem Schrittweiteninterval $h > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} |x_n^H| < \infty$?

(f) Zeigen Sie, dass das Crank-Nicholson-Verfahren A-stabil ist.
Hinweis: Sie können – müssen jedoch nicht – verwenden, dass die Stabilitätsfunktion auch durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$R(z) = \frac{\det\left(I - zA + z\mathbf{1}b^T\right)}{\det(I - zA)},$$

wobei (A, b) die Größen aus dem Butcher-Tableau sind und der Vektor $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist.

1+1+1+2+2 Punkte

Aufgabe 7.

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und dass alle Eigenwerte reell sind.

b) Es kann gezeigt werden, dass der dominierende Eigenwert λ_1 von A einfach vorkommt (Dies muss nicht gezeigt werden). Führen Sie einen Schritt der Vektoriteration (*power method*) zur Berechnung von λ_1 mit dem Startvektor

$$x^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

durch.

c) Welche Bedingung muss der Startvektor $x^{(0)}$ im Allgemeinen erfüllen, sodass die Vektoriteration gegen den zu λ_1 gehörenden Eigenvektor konvergiert?

2+2+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Betrachten Sie das Minimierungsproblem:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \underbrace{x_1^2 + x_2^2(x_2^2 - 1)}_{=f(x)} \tag{3}$$

a) Berechnen Sie alle Minima von (3), also alle Punkte die

$$x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$$

erfüllen. Wie viele Minima existieren? Untersuchen Sie dazu die Hessematrix an kritischen Punkten.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass alle Minima von f im Inneren der Box $(-1,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ liegen.

b) Führen Sie einen Schritt des Gradientenverfahrens (*gradient descent*) mit dem Startvektor

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und optimaler Schrittweite $\alpha_0 > 0$ für das Problem (3) durch. Berechnen Sie hierzu explizit die optimale Schrittweite α_0, indem Sie die Ergebnisse aus dem ersten Aufgabenteil nutzen.

c) Wir betrachten nun das lineare Optimierungsproblem

$$\min_{x\in\chi} \underbrace{x_1 + 2x_2}_{=f(x)} \tag{LP}$$

mit der Zulässigkeitsregion (*feasible region*) $\chi \subset \mathbb{R}^2$, die durch das Viereck mit den Eckpunkten

$$v_1 = (0,0), \quad v_2 = (3,-2), \quad v_3 = (3,1), \quad v_4 = (0,2).$$

begrenzt wird. Lösen Sie die lineare Optimierungsaufgabe (LP).

2+2+2 Punkte