Prof. Dr. Benjamin Stamm
Dr. Alexander Litvinenko

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2019
Klausur | 29.05.2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 19.06.2020 von 15:00–16:30 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstraße 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
Punkte	6	6	9	9	3	3	4	5	10	5	60
Ihre Punkte											

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional $F : D \to \mathbb{R}$ mit

$$F(y) = \int_{-1}^{1} y(x) \log\big(y(x)\big) \, \mathrm{d}x$$

und $D = \{w \in C^2[-1,1] : w(x) \geq \frac{1}{2e}\}$. Dabei bezeichnet log den natürlichen Logarithmus.

(a) Ist D konvex? Ist F konvex?

(b) Geben sie eine Gleichung an, der die Extremale des Funktionals F genügen.

(c) Bestimmen Sie einen Kandidaten für ein Extremum. Liegt ein globales Extremum vor?

2+3+1 = 6 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben sei $\Omega =]0,1[$ sowie die Funktionen

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$g : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \exp(-x).$$

(a) Ist g Lebesgue-messbar? Ist g Lebesgue-integrierbar?

(b) Geben Sie eine Funktion h an mit $f \neq h$ und $h \sim f$ bzgl. der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \quad \text{fast überall auf } \Omega.$$

(c) Zeigen Sie dass
  (i) $f \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < 2$,
  (ii) $g \in L^q(\Omega)$ für $1 \leq q \leq \infty$.

(d) Folgern Sie aus (c) dass $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

2+1+2+1 = 6 Punkte

Aufgabe 3.

Sei die Fläche F parametrisiert durch $\phi : B \to \mathbb{R}^3$ mit $B = (0,1) \times (0, 2\pi)$ und

$$\phi(r, \alpha) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \\ \alpha \end{pmatrix} .$$

(a) Skizzieren Sie die Fläche.

(b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung für den Rand ∂F und berechnen Sie dessen Länge.

(c) Berechnen Sie eine Flächeneinheitsnormale in jedem Punkt von F.

2+5+2 = 9 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^2 \\ zx^2 \end{pmatrix}$$

sowie die Einheitskugel

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\} \ .$$

(a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial V} f \cdot \nu \, \mathsf{d}\sigma$$

wobei ∂V der Rand von V bezeichnet und ν der nach außen zeigende Normalenvektor auf ∂V.

(b) Überprüfen Sie den Satz von Stokes

$$\int_{\partial F} f \cdot \mathsf{d}x = \int_F \mathsf{rot}\, f \cdot \nu \, \mathsf{d}\sigma$$

für $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } y \geq 0\}$ mit $\gamma = \partial F$.

2+7 = 9 Punkte

Aufgabe 5.

Vorgelegt sei das folgende Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

(a) Führen Sie für das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t\ \cos(x(t))$$
$$x(0) = \frac{\pi}{6}$$

und die Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{3}$ einen Schritt des durch das Butcher-Tableau gegebenen Runge-Kutta-Verfahrens aus.

(b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens aus (a) direkt durch Taylorentwicklung.

(c) Konvergiert das Verfahren aus (a) für $\Delta t \to 0$ gegen die exakte Lösung des AWPs?

1+1+1 = 3 Punkte

Aufgabe 6.
Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - (t+2)y(t), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Führen Sie einen Schritt des Trapezverfahrens mit Schrittweite $h = 2$ aus. Das Trapezverfahren ist durch das folgende Butcher-Tableau gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

3 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix A nur reelle Eigenwerte besitzt.

(b) Geben Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gershgorin eine Menge an, in der die Eigenwerte von A enthalten sind.

(c) Führen Sie einen Schritt der Potenzmethode aus, um den größten Eigenwert von A zu finden, d.h. $x_{x+1} = \frac{Ax_k}{||Ax_k||_2}$ für $k = 1$, mit $x_1 = (1, 1, 1, 1)^T$.

(d) Berechnen Sie außerdem den Rayleigh-Quotienten $\frac{(x, Ax)}{(x, x)}$ für den Vektor $x = (1, 2, 1, 1)^T$.

1+1+1+1 = 4 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = 6x^2 + 2xy + 3y^2 - 3x + 2y + 4$$

sowie der Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(a) Besitzt f ein eindeutiges Minimum $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$?

(b) Bestimmen Sie im Punkt (x_0, y_0) eine Abstiegsrichtung für f, d.h. einen Vektor $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta) \leq f(x_0, y_0)$$

für hinreichend kleines $t > 0$.

(c) Minimieren Sie f entlang der in (b) bestimmten Abstiegsrichtung, d.h. bestimmen Sie $t^* \geq 0$, so dass

$$f(x_0 + t^*\xi, y_0 + t^*\eta) < f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta)$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

(d) Bestimmen Sie aus (c) eine neue Approximation für die Minimalstelle von f.

1+1+2+1 = 5 Punkte

Aufgabe 9.
Wir verwenden zum Lösen des skalaren Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = \lambda\, y(t), \quad t \geq 0,$$
$$y(t_0) = y_0.$$

die θ-Methode, d.h.

$$y_{j+1} = y_j + h\big((1-\theta) f(t_j, y_j) + \theta f(t_{j+1}, y_{j+1})\big)$$

mit $\theta \in [0, 1]$.

(a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $R(z)$.

(b) Geben Sie für $\theta = 0$, 0.5 und 1 jeweils das Stabilitätsgebiet an und skizieren Sie die Stabilitätsgebiete.

(c) Ist das Verfahren für $\theta = 0.5$ A-stabil? Ist es L-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Ein Runge-Kutta Verfahren wird als A-stabil bezeichnet, wenn sein Stabilitätsgebiet S die linke Halbebene enthält, das heißt: $S \supset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$.

Hinweis: Ein Runge-Kutta Verfahren heißt L-stabil, wenn es A-stabil ist und $\lim_{z\to-\infty} |R(z)| = 0$ erfüllt.

1+7+2 = 10 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 10.

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens zur Eigenwertbestimmung mit der Matrix A aus.

5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: