Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle

**Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!**

# Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2017/2018
# Klausur | 23. März 2018

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

**Hinweise:**

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 06. April 2018 von 09:00–10:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, SchinkelstraSSe 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

**Matrikelnummer:** ___ ___ ___ ___ ___ ___

**Name, Vorname:** ______________________________

**Unterschrift:** ______________________________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 5 | 3 | 6 | 40 |
| Ihre Punkte | | | | | | | | | |

Klausur + Bonus = Gesamt

Note:

**Aufgabe 1.**

Gesucht ist eine Funktion $y \in D$ mit

$$D := \big\{ w \in C^2([0,1]) : w(0) = w(1) = 1 \big\}$$

und einer gegebenen, glatten Funktion $f$, die das Funktional

$$F : D \to \mathbb{R}, \quad F(y) = \int_0^1 \big(y'(t)\big)^2 + f\big(y(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

minimiert.

a) Bestimmen Sie die erste Variation $\delta F(y; v)$ von $F$ in Richtung $v$, $v \in D_0 := \{w \in C^2([0,1]) : w(0) = w(1) = 0\}$.

b) Welcher Differentialgleichung müssen die Extremalen des Funktionals $F$ genügen?

c) Sei nun $f(x) := x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$. Ist $D$ konvex? Ist das Funktional $F$ konvex? Was können Sie über globale Extremalen des Funktionals $F$ aussagen?
Hinweis: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

**2+1+2 = 5 Punkte**

Name: Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 2.**
Es sei $\Omega := (0, \infty)$ und $x \in \Omega$.

a) Gegeben sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ x^{-1/3} & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie $f \notin L^1(\Omega)$ aber $f \in L^4(\Omega)$.

b) Gegeben sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} x^{-1/5} & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie $g \in L^1(\Omega)$ aber $g \notin L^6(\Omega)$.

c) Für welche $p$ und $q$ gilt die Hölder-Ungleichung $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$? Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung für $p = 6$ um zu zeigen, dass das folgende Integral beschränkt ist:

$$\int_\Omega \frac{1}{\sqrt[5]{(x+2)^3}} e^{-\frac{2}{3}x} dx$$

**1+1+3 = 5 Punkte**

**Aufgabe 3.**

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} z^4 \\ z^4 \exp(y) - 3y^2 \\ 4z^3\big(x + \exp(y)\big) \end{pmatrix},$$

sowie die Kurve

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ 3t - 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x$ ohne Verwendung eines Potentials.

b) Weisen Sie zunächst nach, dass $f$ ein Potential $\varphi$ besitzt, ohne dieses explizit zu berechnen. Bestimmen Sie dann erst $\varphi$.

c) Berechnen Sie jetzt das Arbeitsintegral $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x$ mit Hilfe des in b) bestimmten Potentials.

**2+2+1 = 5 Punkte**

Name: Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 4.**

Sei $P$ die Fläche

$$P := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 3,\ x_1^2 + x_2^2 < 3\right\}.$$

(a) Finden Sie eine Parametrisierung für $P$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|P|$.

(c) Sei $M$ das Volumen zwischen der Fläche $P$ und der Ebene $\{x_3 = 0\}$. Wenden Sie den Satz von Gauß an, um

$$\int_M \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx$$

zu berechnen.
*Hinweis*: Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) := (0, 0, x_3 \sin(x_1^2 + x_2^2))^\top$.

**1+2+2 = 5 Punkte**

**Aufgabe 5.**

Gegeben sei ein Einschrittverfahren mit

$$\Phi_f(t, y, h) = a\, f(t, y) + \frac{1}{4} f\big(t + b\, h, y + c\, h\, f(t, y)\big)$$

a) Geben Sie das Runge-Kutta Tableau für dieses Verfahren an. Ist das Verfahren explizit oder implizit?

b) Für welche Werte von $(a, b, c)$ ist die Konsistenzordnung des Verfahrens mindestens 2?

c) Existieren für Parameter $(a, b, c)$ Werte, so dass das Schema mit der speziellen Flussfunktion $f(t, y) = t^2$ von dritter Ordnung ist?

**1+3+2 = 6 Punkte**

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 6.**

Vorgelegt sei das folgende Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

(a) Führen Sie für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= t^2 \cdot x(t) \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

und die Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{2}$ einen Schritt des durch das Butcher-Tableau gegebenen Runge-Kutte-Verfahrens aus.

(b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens aus (a) mittels Taylorentwicklung.

(c) Konvergiert das Verfahren aus (a) für $\Delta t \to 0$ gegen die exakte Lösung des Anfangswertproblems?

**2+2+1 = 5 Punkte**

**Aufgabe 7.**

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 & -0.5 \\ 0.2 & 3 & 0.5 \\ -0.4 & 0.1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gershgorin eine möglichst kleine Menge an, in der die Eigenwerte von $A$ enthalten sind.

b) Sie möchten den betragsmäßig größten Eigenwert der Matrix $A$ mittels der Vektoriteration bestimmen. Geben Sie Schranken für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens an.

c) Es soll nun der Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert von $A$ ebenfalls iterativ bestimmt werden. Geben Sie dazu ein geeignetes Verfahren an und begründen Sie Ihre Antwort. *Hinweis:* Nutzen Sie die Erkenntnis aus Teil a).

**1,5+1+0,5 = 3 Punkte**

Name: Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 8.**

Gegeben sei die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - y + 1$$

sowie der Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(a) Besitzt $f$ ein eindeutiges Minimum $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$?

(b) Bestimmen Sie im Punkt $(x_0, y_0)$ eine Abstiegsrichtung für $f$, d.h. einen Vektor $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta) \leq f(x_0, y_0)$$

für hinreichend kleines $t > 0$.

(c) Minimieren Sie $f$ entlang der in (b) bestimmten Abstiegsrichtung, d.h. bestimmen Sie $t^* \geq 0$, so dass

$$f(x_0 + t^*\xi, y_0 + t^*\eta) < f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta)$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

(d) Bestimmen Sie aus (c) eine neue Approximation für die Minimalstelle von $f$.

**1+2+1+2 = 6 Punkte**

Name: Matrikel-Nr.: