Prof. Dr. Martin Frank
Prof. Dr. Martin Grepl

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2016/17
Klausur | 31.03.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 07.04.2017 von 10:00–11:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	5	6	5	4	5,5	6	5,5	3	40
Ihre Punkte									

Klausur + Bonus = Gesamt

Note:

Aufgabe 1.

Gesucht ist eine Funktion $y \in D = \left\{ w \in C^2([0,1]) \,:\, w(0) = w(1) = \frac{\pi}{4} \right\}$ die das Funktional

$$F \,:\, D \to \mathbb{R}\,,\; F(y) = \int_0^1 \left(\left(y'(t)\right)^2 + \cos(y(t)) \right) dt$$

minimiert.

a) Bestimmen Sie die erste Variation $\partial F(y; v)$ von F in Richtung v. Dabei sei $v \in D_0 = \left\{ w \in C^2([0,1]) \,:\, w(0) = w(1) = 0 \right\}$.

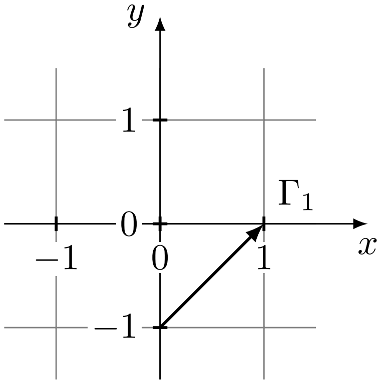
b) Welcher Differentialgleichung müssen die Extremalen des Funktionals F genügen?

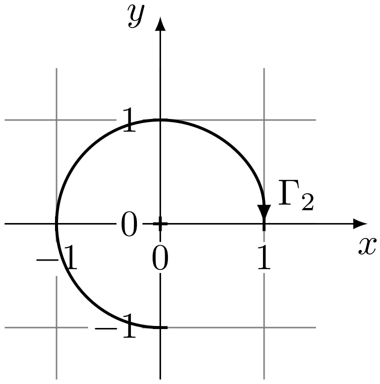
c) Ist D konvex? Kann eine Aussage über die Konvexität des Funktionals F getroffen werden?

2+1,5+1,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.





Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} y^3 + 2x \\ 3xy^2 \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Wege Γ_1 und Γ_2 von $(0, -1)$ nach $(1, 0)$ gemäß der Skizze.

(a) Bestimmen Sie die Arbeitsintegrale

$$\int_{\Gamma_1} f \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_2} f \cdot dx$$

direkt mittels der Definition.
Hinweis: Folgende Stammfunktionen sind gegeben:

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$
$$\int \cos^4(x)dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

(b) Besitzt f ein Potential? Falls ja, geben Sie es an.

4+2 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Volumen

$$U := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \text{ und } z^2 \leq 4\right\}$$

sowie das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 z \\ y^2 - 2x \\ z^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Flussintegral durch den Rand von U, d.h.

$$\int_{\partial U} n \cdot v ds,$$

wobei n der nach außen zeigende Normalenvektor ist.

5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.

(a) Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung, um zu zeigen, dass die Funktion

$$f :]1, \infty[\to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

in der Menge $L^1(]1, \infty[)$ enthalten ist.

(b) Geben Sie eine Funktion $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ an, für die gilt

$$g \in L^1([1,2]), \text{ aber } g \notin L^2([1,2]).$$

(c) Gibt es eine Funktion $h : [1,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$h \in L^2([1,2]), \text{ aber } h \notin L^1([1,2])?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

1,5+1+1,5 Punkte

Aufgabe 5.

Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)), \quad t \geq 0, \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Dieses soll mit Hilfe des folgenden Einschrittverfahren

$$y_{j+1} = y_j + h\left\{\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_j, y_j) + \frac{1}{2\alpha} f\Big(t_j + \alpha h, y_j + \alpha h f(t_j, y_j)\Big)\right\}$$

gelöst werden, wobei $\alpha \neq 0$ ein Parameter und h die Zeitschrittweite ist.

a) Geben Sie das Butcher-Tableau für dieses Verfahren an. Ist das Verfahren explizit oder implizit?

b) Zeigen Sie mittels der Taylor-Entwicklung, dass das Verfahren mindestens die Konsistenzordnung 2 für alle Werte von $\alpha \neq 0$ hat. *Hinweis*: Die Funktion f sei genügend oft differenzierbar.

c) Gibt es ein α, für welches das Verfahren die Konsistenzordnung 3 hat?

d) Sei nun $\alpha = 1$. Geben Sie für diesen Fall das Butcher Tableau für ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren RK1(2) an.

1+2,5+1+1 Punkte

Aufgabe 6.

Wir betrachten die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators, ein skalares Anfangswertproblem zweiter Ordnung gegeben durch

$$\begin{aligned} y''(t) + 2\,\zeta\,\omega_n\,y'(t) + \omega_n^2\,y(t) &= f(t), \quad 0 \leq t, \leq t_f \\ y(0) &= y_0, \\ y'(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Hierbei sind y_0 und v_0 die Anfangsbedingungen für die Auslenkung und Geschwindigkeit, ζ ist der Dämpfungsgrad, $\omega_n > 0$ die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz und $f(t)$ eine gegebene Kraft.

a) Transfomieren Sie diese Problem auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$w'(t) = Aw(t) + F, \quad w(0) = w_0, \quad 0 \leq t, \leq t_f \tag{1}$$

mit $w(t) = (y(t)\ y'(t))^T \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie A, F und w_0 an.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A. Für welche Werte von ζ und ω_n ist das Problem Lyapunov-stabil, asymptotisch stabil oder instabil?

c) Wir betrachten nun konkret zwei Fälle, in denen einmal $\zeta = 0$ (Fall I) und einmal $\zeta = 0.5$ (Fall II) ist. Sie möchten eines der folgenden Einschrittverfahren für die numerische Lösung von (1) einsetzen:

- Explizites Euler-Verfahren
- Implizites Euler-Verfahren
- Trapez-Verfahren
- Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung

Diskutieren Sie den Einsatz der vier Verfahren hinsichtlich Stabilität für beide Fälle I und II.

2+3+1 Punkte

Aufgabe 7.

Wir betrachten das lineare Mehrschrittverfahren

$$y_{j+2} + \alpha_1 y_{j+1} + a y_j = h\big(\beta_2 f_{j+2} + \beta_1 f_{j+1} + \beta_0 f_j\big)$$

wobei $f_j = f(t_j, y_j)$ und a ein frei zu wählender Parameter sei.

a) Bestimmen Sie α_1, β_2, β_1 und β_0 in Abhängigkeit von dem Parameter a, so dass das Verfahren konsistent von der Ordnung 3 ist.

b) Gibt es einen Wert für a, so dass das Verfahren konsistent von der Ordnung 4 ist?

c) Sei $\alpha_1 = -1 - a$. Für welche Werte von a ist das Verfahren null-stabil? Was können Sie über die Konvergenz des Verfahrens dann aussagen?

3+1+1,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 & -0.5 \\ 0.2 & 3 & 0.5 \\ -0.4 & 0.1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gershgorin eine möglichst kleine Menge an, in der die Eigenwerte von A enthalten sind.

b) Sie möchten den betragsmäßig größten Eigenwert der Matrix A mittels der Vektoriteration bestimmen. Geben Sie Schranken für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens an.

c) Es soll nun der Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert von A ebenfall iterativ bestimmt werden. Geben Sie dazu ein geeignetes Verfahren und die benötigten Startwerte an. *Hinweis:* Nutzen Sie die Erkenntis aus Teil a).

1,5+1+0,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: