Dr. Graham Alldredge
Prof. Mike Espig
Roman Schärer, M.Sc.
Dipl.-Math. Birte Schmidtmann

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2015/2016
Klausur am 1.4.2016 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Seien

$$M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\, x_2 > 0\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 > 1\}$$

und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} (x_1 - x_2)^{-1/5}(x_1 + x_2)^{-1} & \text{falls } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für welche $p \in [1, \infty)$ gilt $f \in L^p(M)$? Berechnen Sie die p-Norm $\|f\|_p$ auf M für alle $p \in [1, \infty)$ für die $f \in L^p(M)$ gilt.
Hinweis: Koordinatentransformation.

3,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Sei Γ die Ellipse mit der Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Bogenlänge der Ellipse durch

$$4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(1-b^2)\cos^2 t}\, dt$$

gegeben ist.

b) Welches dieser Vektorfelder

$$F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad G(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_1 x_2^2 \\ x_2^3 + 2x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$$

besitzt ein Potential? Berechnen Sie dieses Potential.

c) Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $\int_\Gamma F \cdot dx$ beziehungsweise $\int_\Gamma G \cdot dx$. Sie dürfen das Potential benutzen.

2+2+1,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Sei P die Fläche

$$P := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1,\, x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}.$$

(a) Finden Sie eine Parametrisierung für P.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|P|$.

(c) Sei

$$M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < 1 - x_1^2 - x_2^2,\, x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

Wenden Sie den Satz von Gauß an, um

$$\int_M \exp(x_1^2 + x_2^2)\, dx$$

zu berechnen.

Hinweis: Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) := (0, 0, x_3 \exp(x_1^2 + x_2^2))^T$.

1+2+2 Punkte

Aufgabe 4.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Bereich mit stückweise glattem und kompaktem Rand mit äußerer Normale $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \ldots, \nu_n(x))^T$.

a) Sei $\mathcal{L} : C^1(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ der lineare Operator, der für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ durch

$$u \mapsto \mathcal{L}(u) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

definiert ist. Sei $F : C^2(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ das Funktional

$$u \mapsto F(u) := \int_\Omega (\mathcal{L}(u))^2 \, dx.$$

Berechnen Sie die erste Variation in Richtung $v \in C^2(\overline{\Omega})$.

b) Ist F konvex? Ist es strikt konvex? Begründen Sie Ihre Antworten. Was können Sie zu Extremstellen von F aussagen?

c) Seien $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Leiten Sie die Formel

$$\int_\Omega \mathcal{L}(u)\,\mathcal{L}(v)\,dx = \int_{\partial\Omega} v\,\mathcal{L}(u) \sum_{i=1}^{n} \nu_i \, dS - \int_\Omega v \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(u))} \, dx$$

mit Hilfe des Satzes von Gauß her.
Hinweis: Sei $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Divergenz des Vektorfeldes

$$v\,\mathcal{L}(u)\mathbf{e} = \begin{pmatrix} v\,\mathcal{L}(u) \\ v\,\mathcal{L}(u) \\ \vdots \\ v\,\mathcal{L}(u) \end{pmatrix}.$$

d) Nun begrenzen wir F auf

$$M := \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}) : u\big|_{\partial\Omega} = 1 \right\}.$$

Welche partielle Differentialgleichung erfüllt eine Minimalstelle von $F : M \to \mathbb{R}$?
Hinweis: Nutzen Sie die Formel vom Teil c) aus.

1,5+2+1+1,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hat die Matrix A nur reelle Eigenwerte? Begründen Sie ihre Antwort. Leiten Sie ferner mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin eine obere Schranke für den größten Eigenwert und eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert dieser Matrix her.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und

$$B = \begin{pmatrix} n(n+1) & 1 & 2 & \dots & n \\ n & n(n+1) & 1 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & n(n+1) & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n & n(n+1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix B regulär ist.

3+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Ferner nehmen wir an, dass für die Eigenwerte

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

gilt.

a) Geben Sie den Algorithmus der Vektoriteration an und beschreiben Sie wie der betragsmäßig größte Eigenwert bestimmt werden kann.

b) Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ein Startwert für die Vektoriteration mit

$$|\tan(x^0, \mathcal{U}_1)| = c \in \mathbb{R}_+, \qquad \mathcal{U}_1 = \text{span } u_1$$

und $Au_1 = \lambda_1 u_1$. Wieviele Iterationen $k_{c,A} \in \mathbb{N}$ werden bei der Vektoriteration benötigt, sodass

$$|\tan(x^{k_{c,A}}, \mathcal{U}_1)| \leq \varepsilon$$

gilt?

2+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Wir betrachten das Anfangswertproblem für gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad && a \le t \le b \\ y(t_0) &= y_0, && a \le t_0 \le b. \end{aligned} \tag{1}$$

Zur Lösung wird ein Einschrittverfahren mit

$$\Phi_f(t, y, h) = af(t, y) + \frac{1}{4} f(t + bh, y + chf(t, y))$$

verwendet.

a) Geben Sie die Evolution der Differentialgleichung (**??**) für die spezielle Funktion $f(t, y(t)) = y(t)$ analytisch an.

b) Für welche Werte von (a, b, c) ist die Konsistenzordung des Verfahrens mindestens 2?

c) Existieren Parameter (a, b, c), sodass das Schema mit der speziellen Funktion $f(t, y) = t^2$ von dritter Ordnung ist?

1+2+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ frei wählbare Parameter und folgendes Butcher-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \beta & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \gamma \end{array}$$

a) Ist das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren explizit oder implizit?

b) Geben Sie Parameter $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ an, sodass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren invariant gegenüber Autonomisierung und konsistent mit der Ordnung 1 ist. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

c) Hat das Runge-Kutta-Verfahren mit den Parametern $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ (von Aufgabenteil b)) sogar Konsistenzordnung 2?

1+3+1 Punkte