Prof. Dr. Martin Frank
Prof. Dr. Benjamin Berkels

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2014
Klausur | 27.03.2015

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 10.04.2015 von 10:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	4	5	5	5	5	5	5	6	40
Ihre Punkte									

Klausur + Bonus = Gesamt

Note:

Aufgabe 1.

Vorgelegt sei das folgende Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

(a) Führen Sie für das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t\ \sin(x(t))$$
$$x(0) = \frac{\pi}{2}$$

und die Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{2}$ einen Schritt des durch das Butcher-Tableau gegebenen Runge-Kutte-Verfahrens aus.

(b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens aus (a) direkt durch Taylorentwicklung.

(c) Konvergiert das Verfahren aus (a) für $\Delta t \to 0$ gegen die exakte Lösung des AWPs?

1,5+1,5+1 Punkte

Aufgabe 2.

a) Vorgelegt sei das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{4} & \beta \\ \frac{2}{3} & \alpha & \frac{5}{12} \\ \hline & \frac{1}{4} & \gamma \end{array}$$

Bestimmen Sie α, β, γ so, dass das zugehörige RK-Verfahren invariant gegenüber Autonomisierung, sowie konsistent mit mindestens Ordnung 2 ist.

b) Betrachten Sie das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}. \end{array}$$

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion R des zugehörigen RK-Verfahrens. Ist das Verfahren A-Stabil?

3+2 Punkte

Aufgabe 3.
Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix A nur reelle Eigenwerte besitzt.

(b) Geben Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gershgorin eine Menge an, in der die Eigenwerte von A enthalten sind.

(c) Es soll der Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert von A bestimmt werden. Geben Sie dazu ein geeignetes Verfahren an. Führen Sie ausgehend vom Startvektor $x_0 = (1, 1, 1, 1)^T$ einen Schritt dieses Verfahrens aus.

(d) Benutzen Sie die Eigenvektornäherung aus Aufgabenteil (c), um eine Näherung für den zugehörigen Eigenwert anzugeben.

1+1,5+1,5+1 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2 - 3x + 2y + 4$$

sowie der Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(a) Besitzt f ein eindeutiges Minimum $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$?

(b) Bestimmen Sie im Punkt (x_0, y_0) eine Abstiegsrichtung für f, d.h. einen Vektor $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta) \leq f(x_0, y_0)$$

für hinreichend kleines $t > 0$.

(c) Minimieren Sie f entlang der in (b) bestimmten Abstiegsrichtung, d.h. bestimmen Sie $t^* \geq 0$, so dass

$$f(x_0 + t^*\xi, y_0 + t^*\eta) < f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta)$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

(d) Bestimmen Sie aus (c) eine neue Approximation für die Minimalstelle von f.

2+0,5+2+0,5 Punkte

Aufgabe 5.

Wir betrachten das Funktional

$$F : D \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_0^1 \left[(y(t)-c)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + e^{y(t)} \right] \mathrm{d}t,$$

$$\text{wobei} \quad D = \left\{ w \in C^2([0,1]) \, : \, w(0) = 0, w(1) = 1 \right\}$$

zu einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die erste Variation $\delta F(y; v)$ von F im Punkt $y \in D$ in Richtung $v \in D_0$, wobei

$$D_0 = \left\{ w \in C^2([0,1]) \, : \, w(0) = w(1) = 0 \right\}.$$

b) Welcher gewöhnlichen Differentialgleichung müssen die Extremstellen von F genügen?

c) Ist die zulässige Menge D konvex? Ist das Funktional F konvex? Was können Sie über globale Extremalen des Funktionals F aussagen?

1+1+2+1 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben seien die Funktionen

$$f : [1,2] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$g : [1,2] \to \mathbb{R} \quad g(x) = (\cos x)^3 + \frac{1}{x}.$$

a) Ist f Lebesgue-integrierbar? Ist g Lebesgue-integrierbar?

b) Zeigen Sie,

i) $f \in L^p([1,2])$ für $1 \leq p < \frac{3}{2}$ und $f \notin L^p([1,2])$ für $p \geq \frac{3}{2}$,

ii) $g \in L^p([1,2])$ für $1 \leq p$.

c) Zeigen Sie, dass $f \cdot g \in L^1([1,2])$.

1,5+2+1,5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2xy + \sin(z) \\ x^2 \\ x\cos(z) \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Zeigen Sie, dass f ein Potential besitzt, und berechnen Sie dieses.

b) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot dx$ für die Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [0,\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t), t\big)^T, \\ \gamma_2 &: [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \big(t^2, t, t\big)^T. \end{aligned}$$

3+2 Punkte

Aufgabe 8.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 \\ \frac{1}{3}x_2^3 + \sin x_1 \end{pmatrix}.$$

Ferner seien $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto 4 - x_1^2 - x_2^2$ und $M := \{x : c(x) \geq 0\}$, d.h. B ist ein Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 2.

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral (zweiter Art) über den Rand von M

$$\int_{\partial M} \langle f, \nu \rangle dA$$

mit Hilfe eines Integralsatzes.

b) Berechnen Sie den Minimierer von $\operatorname{div} f$ auf M, d.h. den Minimierer unter der Nebenbedingung $c(x) \geq 0$.

3,5+2,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Prof. Dr. Martin Frank
Prof. Dr. Benjamin Berkels

Mathematische Grundlagen III (CES) | WS 2014
Klausur am 27.03.2015 | Informationen zur Klausur

Klausur: 27.03.2015, 13:30 – 16:00 Uhr im Raum 1090|334, klPhys.

Bearbeitungszeit: 150 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel (Formelsammlung, Formelblätter, Taschenrechner, Mobiltelefone, Laptops etc.) sind **nicht** zugelassen.

Nehmen Sie keine **Jacken**, **Taschen** oder **Mobiltelefone** (ausschalten!) mit an Ihren Platz. Sie können sie vorne im Hörsaal ablegen. Das Mitführen von Mobilfunkgeräten an Ihrem Platz gilt als Täuschungsversuch.

Ausweiskontrolle: Bitte legen Sie an ihrem Platz Ihren Studierendenausweis bereit.

Einlass ist 5 Minuten vor Beginn der Klausur. Auf Ihrem Platz liegt ein geschlossener Klausurbogen. Er darf erst nach Aufforderung geöffnet werden (Zuwiderhandlung kann mit Punktabzug oder Ausschluss von der Klausur bestraft werden.)

Klausureinsicht und mündliche Nachprüfungen:

- Die Klausureinsicht findet am 10.04.2015 von 10:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Weitere Informationen zur Klausureinsicht werden vorher auf der Instituts-Homepage oder im L2P-Lernraum bekannt gegeben.
- Ein Einspruch gegen die Bewertung der Klausur ist nur schriftlich während der Klausureinsicht möglich.
- Anmeldungen zu mündlichen Nachprüfungen erfolgen ebenfalls während der Einsicht.

Viel Erfolg!