Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: | | | | | | |

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Mathematische Grundlagen III (CES)

28.03.2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 16.04.2014 von 15:00–16:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Ein Termin für eine mündliche Nachprüfung ist dort zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

NAME, VORNAME: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte	3	4	3	30
Ihre Punkte				

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gesucht ist eine Funktion $y \in D$ mit

$$D := \{w \in C^2([0,1]) : w(0) = w(1) = 1\},$$

die das Funktional

$$F : D \to \mathbb{R}, \quad F(y) = \int_0^1 \left((y'(t))^2 + e^{ay(t)} \right) dt,$$

welches von einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$ abhängt, minimiert.

a) Bestimmen Sie die erste Variation $\partial F(y; v)$ von F in Richtung v, $v \in D_0 := \{w \in C^2([0,1]) : w(0) = w(1) = 0\}$.

b) Welcher Differentialgleichung müssen die Extremalen des Funktionals F genügen?

c) Ist D konvex? Ist das Funktional F konvex? Was können Sie über globale Extremalen des Funktionals F aussagen? Gibt es eine Lösung für $a = 0$?

2+1+1.5 Punkte

Aufgabe 2.

E sei $\Omega := (0, \infty)$ und $x \in \Omega$.

a) Gegeben sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}, & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie $f \notin L^1(\Omega)$ aber $f \in L^2(\Omega)$.

b) Gegeben sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}, & \text{für } 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie $g \in L^1(\Omega)$ aber $g \notin L^2(\Omega)$.

c) Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung in der Form

$$\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}},$$

um das folgende Integral abzuschätzen:

$$\int_\Omega \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^4}} e^{-\frac{2}{3}x} dx$$

2+2+3 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2xy - 2x\cos(z) \\ x^2+1 \\ x^2\sin(z) \end{pmatrix}, \quad (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3.$$

a) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot dx$ ohne Verwendung eines Potentials direkt als Kurvenintegral, wobei

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,2\pi].$$

b) Weisen Sie nach, dass f ein Potential besitzt und berechnen Sie dieses.

c) Berechnen Sie jetzt das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot dx$ mit Hilfe des in b) bestimmten Potentials.

1.5+1.5+1 Punkte

Aufgabe 4.

Es sei

$$F := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2,\ z \geqslant 0,\ z^2 + (x^2+y^2)^2 = 4\right\}$$

eine Oberfläche. Ferner sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

In einem Punkt $(x,y,z)^T$ auf der Oberfläche sei der Normalenvektor so definiert, dass die dritte Komponente positiv ist.

a) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ \sqrt{4-r^4} \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $r \in [0, \sqrt{2}]$ eine Parameterdarstellung von F ist.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_F \boldsymbol{f} \cdot \nu$$

als Volumenintegral.

Hinweis: Beachte Sie, dass F keine geschlossene Fläche ist.

c) Berechnen Sie

$$\int_F \mathrm{rot}\boldsymbol{f} \cdot \nu d\sigma.$$

Hinweis: $\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$ und $\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$.

0.5+3+2 Punkte

Aufgabe 5.

Wir betrachten die skalare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \in [0, T], \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

und das Euler-Verfahren $y^0 = y_0$, $y^{j+1} = y^j + hf(t_j, y^j)$, $j = 1, \ldots, n-1$, mit $n \in \mathbb{N}$, $h = T/n$, $t_j = jh$.

a) Geben Sie eine grafische Darstellung des lokalen Abbruchfehlers $\delta_{j,h} = y(t_{j+1}) - y_h(t_{j+1}; t_j, y(t_j))$.

b) Zeigen Sie, dass für das Euler-Verfahren $|\delta_{j,h}| \leqslant ch^2$ gilt, mit einer Konstante c unabhängig von h. Was ist die Konsistenzordnung dieser Methode?

Sei jetzt $f(t, y(t)) = \lambda y(t) + g(t)$, wobei $\lambda > 0$ eine vorgegebene Konstante und $g \in C^1([0, T])$ eine bekannte Funktion ist. Sei $e_j := y(t_j) - y^j$ der globale Fehler.

c) Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt:

$$e_{j+1} = (1 + h\lambda)e_j + \delta_{j,h}, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

d) Zeigen Sie, dass $|e_j| \leqslant Mh$, für $j = 0, 1, \ldots, n$, gilt, mit einer Konstante M unabhängig von h (Hinweis: zeigen Sie, dass $(1 + h\lambda)^i \leqslant e^{T\lambda}$, für $0 \leqslant i \leqslant n$ gilt).

1+1+1+2 Punkte

Aufgabe 6.

Wir betrachten ein allgemeines lineares k-Schrittverfahren

$$y^{j+k} = -\sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell y^{j+\ell} + h\sum_{\ell=0}^{k} b_\ell f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}), \quad j = 0, 1, \dots n-k,$$

mit Startwerten $y^0, \dots, y^{k-1}$.

a) Geben Sie eine genaue Beschreibung der sogenannten Wurzelbedingung und der Nullstabilität eines linearen k-Schrittverfahrens.

b) Was ist die maximale Konvergenzordnung (abhängig von k) eines linearen k-Schrittverfahrens?

Wir betrachten jetzt folgendes lineare 2-Schrittverfahren

$$y^{j+2} = -4y^{j+1} + 5y^j + h\big(4f(t_{j+1}, y^{j+1}) + 2f(t_j, y^j)\big).$$

Diese Methode hat Konsistenzordnung 3 (brauchen Sie nicht zu zeigen).

c) Erfüllt diese Methode die Wurzelbedingung? Was ist die Konvergenzordnung dieser Methode?

1+1+2 Punkte

Aufgabe 7.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenvektoren $v^1, \dots, v^n$, ($\|v^i\|_2 = 1$). Wir nehmen an, dass für die Eigenwerte gilt:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|.$$

Sei $x^0 = \sum_{i=1}^n c_i v^i$, mit $c_1 \neq 0$. Wir betrachten die Vektoriteration:

$$x^k := A^k x^0, \quad \lambda^{(k)} := \frac{(x^k)^T x^{k+1}}{\|x^k\|_2^2}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

a) Zeigen Sie:

$$x^k = \lambda_1^k (c_1 v^1 + r^k), \quad \text{mit } \|r^k\|_2 = \mathcal{O}\Big(|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|^k\Big) \quad (k \to \infty).$$

Was kann man hieraus schließen?

b) Zeigen Sie:

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = \mathcal{O}\Big(|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|^k\Big) \quad (k \to \infty).$$

Was kann man zur Konvergenzgeschwindigkeit der Vektoriteration schließen?

c) Wir nehmen an, dass der Eigenwert λ_i einfach ist, d.h., $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $j \neq i$. Beschreiben Sie die inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung zur Bestimmung von λ_i. Diskutieren Sie die Konvergenzgeschwindigkeit dieser Methode.

d) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie mit Hilfe der Gerschgorin-Kreise eine obere Schranke für den größten Eigenwert und eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert dieser Matrix her.

2+1+2+1 Punkte

Aufgabe 8.

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mittels Givens-Transformationen orthogonale Matrizen Q_i und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $Q_2 Q_1 A = R$ gilt.

b) Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & -8 & 30 & 15 \\ 10 & 4 & -30 & 15 \\ 10 & 6 & 75 & 45 \end{pmatrix}$$

durch Householder-Spiegelungen auf eine ähnliche obere Hessenberg-Matrix.

c) Beim QR-Algorithmus wird in einer Vorbearbeitungsphase die Matrix auf obere Hessenbergform gebracht. Erklären Sie, weshalb das gemacht wird.

2+2+1 Punkte