Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: | | | | | | |

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Mathematische Grundlagen III (CES)

22.03.2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150Minuten** Zeit zur Bearbeitung. Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **40%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 04.04.2013 von 10:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Ein Termin für eine mündliche Nachprüfung ist dort zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Bei Rücktritt von der Klausur vor Beginn der Klausur ist ein Attest notwendig. Bei Rücktritt nach Beginn der Klausur ist ein Attest einer Vertrauensärztin/eines Vertrauensarztes der RWTH notwendig. Der Prüfungsausschuss entscheidet über die Anerkennung des Attestes.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

NAME, VORNAME: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	14	8	14	14	12	14	10	14	
Ihre Punkte									

Note:

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional $J : C^2([0,T]) \to \mathbb{R}$ mit

$$J(\theta) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 - mgl\left(1 - \cos\left(\theta(t)\right)\right) \right) dt.$$

und $l, m, g > 0$.

(a) Bestimmen Sie die erste Variation von J.

(b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen von J genügen.

(c) Ist J konvex?

5 + 5 + 4 Punkte

Aufgabe 2.

Es sei $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ die abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Weiterhin sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus B$ und $f : G \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Bestimmen Sie alle $p > 0$ so dass $f \in L^p(G)$.

Hinweis: Polarkoordinaten

8 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ \cos(y + z^2) \\ 2z\cos(y + z^2) \end{pmatrix}$$

und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma\,(t) = \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin^2 t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie ein Potential von f.

(c) Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_\gamma f \cdot ds$$

(i) direkt;

(ii) mit Hilfe des Potentials aus (b).

3 + 5 + 6 Punkte

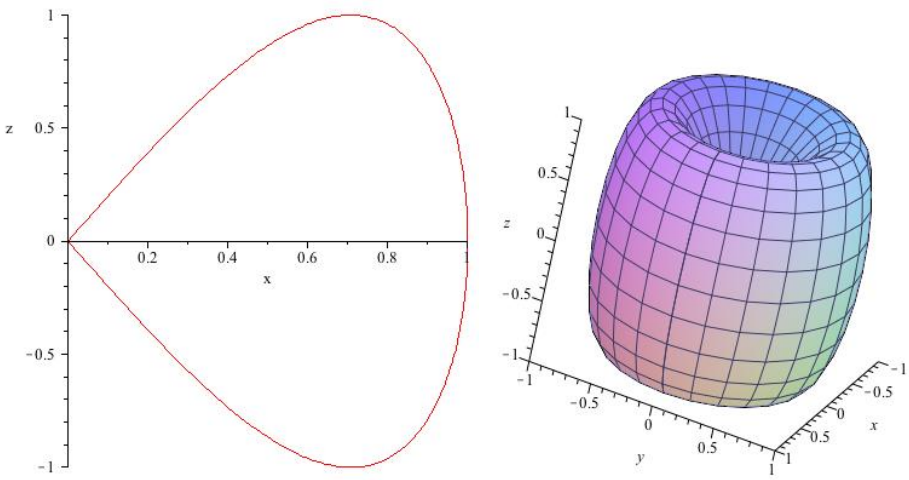
Aufgabe 4.

Sei S die durch Rotation der Kurve

$$\begin{array}{rcl} r &=& \cos u, \\ z &=& \sin 2u, \end{array} \quad \text{für } -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$$

um die z-Achse bestimmte Oberfläche (vergleiche Abbildung).

Nutzen Sie das Divergenz-Theorem um das Volumen des Gebietes innerhalb von S zu bestimmen.



Hinweis 1: Benutzen Sie ein Vektorfeld f mit $\nabla \cdot f = 1$.
Hinweis 2: Stammfunktion $\frac{d}{dx}\frac{1}{16}(4x - \sin 4x) = \sin 2x \cos x \sin x$.

14 Punkte

Aufgabe 5.

Man betrachte das Einzelschrittverfahren

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\big(f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)\big) \tag{2}$$

zur Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = f(x, y(x)), y(0) = y_0$.

(a) Definieren Sie den lokalen Entwicklungsfehler des Verfahrens (2) und schätzen Sie ihn ab.

(b) Zeigen Sie, dass der Entwicklungsfehler für das folgende Mehrschrittverfahren von gleicher Ordnung wie der des Einzelschrittverfahrens (2) ist:

$$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \tag{3}$$

(c) Nennen Sie die Konsistenzbedingung eines linearen Mehrschrittverfahrens und überprüfen Sie diese für das Schema (3).

(d) Welche Aussage bezüglich der Stabilität der beiden Verfahren (2) und (3) können Sie treffen? Begründen Sie Ihre Aussagen.

3,5 + 3,5 + 2 + 3 Punkte

Aufgabe 6.

Ein implizites Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $s = 2$ habe das folgende Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & c_1 & c_2 \end{array}$$

(a) Geben Sie die allgemeine Form eines impliziten Verfahrens mit $s = 2$ Schritten an.

(b) Welche Anforderungen an a_{ij}, b_i und c_i (für $i, j \in \{1, 2\}$) müssen erfüllt sein, damit das Verfahren erster Ordnung ist?

(c) Welche Anforderungen an a_{ij}, b_i and c_i (für $i, j \in \{1, 2\}$) müssen erfüllt sein, damit das Verfahren zweiter Ordnung ist?

(d) Zeigen Sie, dass das Verfahren gegeben durch das Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 2/5 & 1/10 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

ein Verfahren zweiter Ordnung ist.

3 + 8 ((b)+(c)) + 3 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die gestörte Matrix

$$A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 13+\epsilon & 5 & \epsilon-5 \\ -6 & 2-\epsilon & \epsilon-6 \\ -11+\epsilon & -11+\epsilon & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Schätzen Sie die Eigenwerte der gestörten Matrix $A(\epsilon)$ mittels des Satzes von Bauer-Fike in Abhängigkeit von der Störung $\epsilon \in \mathbb{R}$ ab. Verwenden Sie hierfür die 1-Norm. Es existiert hierfür eine sinnvolle Dekomposition $A(\epsilon) = M + S(\epsilon)$ für die die Matrix $D = T^{-1}MT$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist. Nutzen Sie diese Dekomposition.

(b) Benutzen Sie die in Aufgabe (a) gewonnene Abschätzung

$$\sigma(A(\epsilon)) \subseteq \{x : |x+4| \leq 6|\epsilon|\} \cup \{x : |x-8| \leq 6|\epsilon|\} \cup \{x : |x-18| \leq 6|\epsilon|\}$$

um ϵ so zu bestimmen, dass 0 kein Eigenwert der Matrix A sein kann.

(c) Ist die Matrix $A(\epsilon)$ für $\epsilon = \frac{3}{5}$ invertierbar?

6+2+2 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

deren Eigenwerte reell sind.

(a) $\lambda = 8$ ist ein Eigenwert der Matrix A. Weisen Sie ohne explizite Berechnung der Eigenwerte von A, z.B. mit Hilfe des Satzes von Gershgorin, nach, dass $\lambda = 8$ der größte Eigenwert von A ist.

(b) Begründen Sie, warum man $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht als Startvektor für die Vektoriteration wählen sollte.

(c) Das Spektrum von A ist gegeben durch: $\sigma(A) = \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 8\}$. Zu welchem Eigenwert konvergiert eine inverse Vektoriteration mit geeignetem Startvektor $x^{(0)}$?

(d) Führen Sie einen Schritt der inversen Vektoriteration nach Wielandt für eine Schätzung $\lambda = 2$ und den Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{1}{4} \\ 4 \end{pmatrix}$ durch. Zu welchem Eigenwert würde diese inverse Vektoriteration nach Wielandt konvergieren?

(e) Erläutern Sie an Hand des Rayleigh-Shifts knapp die Vorteile eines Shift-Verfahrens bei Anwedung des QR-Verfahrens zur Berechnung der Eigenwerte einer großen Matrix M.

4,5+2+1+4+2,5 Punkte