Aufgabe 1. Vorgelegt sei das Funktional $F : D \to \mathbb{R}$ mit

$$F(y) = \int_{-1}^{1} y(x) \log(y(x)) dx$$

und $D = \{w \in C^2[-1,1] : w(x) \geq \frac{1}{2e}\}$. Dabei bezeichnet log den natürlichen Logarithmus.

a) Ist D konvex? Ist F konvex?

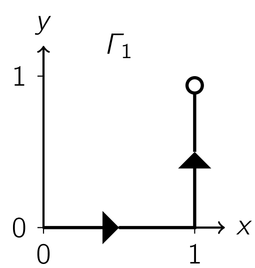
b) Geben sie eine Differentialgleichung an, der die Extremale des Funktionals F genügen. Bestimmen Sie einen Kandidatien für ein Extremum. Liegt ein globales Extremum vor?

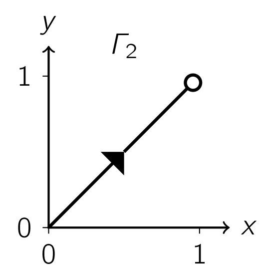
2 + 3 Punkte

Aufgabe 2. Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xe^y \\ \sin(x) + y \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Wege Γ_1 und Γ_2 von $(0,0)$ nach $(1,1)$:





a) Bestimmen Sie die Arbeitsintegrale

$$\int_{\Gamma_1} f \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_2} f \cdot dx\ .$$

b) Besitzt f ein Potential?

3 + 1 Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei $\Omega =]0,1[$ sowie die Funktionen

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$g : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \exp(-x).$$

a) Ist g Lebesgue-messbar? Ist g Lebesgue-integrierbar?

b) Geben Sie eine Funktion h an mit $f \neq h$ und $h \sim f$ bzgl. der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \quad \text{fast überall auf } \Omega.$$

c) Zeigen Sie dass

(i) $f \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < 2$,

(ii) $g \in L^q(\Omega)$ für $1 \leq p \leq \infty$.

d) Folgern Sie aus c) dass $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

2 + 1 + 2 + 1 Punkte

Aufgabe 4. Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xz^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

sowie der Einheitswürfel

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral (zweiter Art)

$$\int_{\partial V} \langle f, \nu \rangle \, d\sigma \ ,$$

wobei ∂V den Rand von V bezeichnet und ν das von V nach aussen zeigende Einheitsnormalenfeld.

3 Punkte

Aufgabe 5. Gegeben sei das Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t,x), \\ k_2 &= f(t+ah, x+ahk_1), \\ \hat{\psi}(t,x;h) &= x + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \end{aligned}$$

mit $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie das Runge-Kutta-Tableau für dieses Verfahren an. Ist das Verfahren explizit oder implizit?

b) Leiten Sie Bedingungen für die Koeffizienten $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ her, damit das Verfahren die Ordnung 2 besitzt.
Hinweis: Die Funktion f sei dazu genügend oft differenzierbar.

1,5 + 2,5 Punkte

Aufgabe 6. Zu lösen sei das Anfangswertproblem

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x,$$
$$x(t_0) = x_0,$$

wobei $x \in C^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^2)$, $t_0 \in [t_1, t_2]$, mithilfe des Heunschen Verfahrens, welches durch das Runge-Kutta-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

gegeben ist.

a) Leiten Sie das Stabilitätsgebiet des Heunschen Verfahrens im Allgemeinen und für obiges Anfangswertproblem im Speziellen her.
Hinweis: Entkoppeln Sie für den zweiten Teil der Aufgabe zunächst die Differentialgleichungen.

b) Für welche Schrittweiten h ist das Heunsche Verfahren für obiges Anfangswertproblem stabil?

3 + 1 Punkte

Aufgabe 7. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie unter Verwendung des Satzes von Gerschgorin Abschätzungen für die Eigenwerte von A an.

b) Führen Sie zwei Schritte der klassischen Vektoriteration mit dem Startvektor $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ durch und geben Sie eine Näherung für den betragsgrössten Eigenwert von A an.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 8. Benutzen Sie das QR-Verfahren mit Shift zur Berechnung der Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen sie die QR-Zerlegung von $A - \sigma_1 I := QR$ für beliebiges σ_1.

Führen Sie nun einen QR-Schritt mit Shift σ_1 durch, d.h. stellen sie die QR-Zerlegung der Matrix $A - \sigma_1 I := QR$ auf und berechnen Sie die Transformierte mit Rück-Shift $A_1 := RQ + \sigma_1 I$ für

b) $\sigma_1 = 0$, d.h. ohne Shift,

c) $\sigma_1 = 1$, d.h. mit Shift.

d) Wie ändert sich die Konvergenz der Nicht- bzw. Nebendiagonalelemente im Vergleich A_1 für $\sigma_1 = 0$ zu A_1 für $\sigma_1 = 1$ unter der Voraussetzung $\epsilon \ll 1$?

Hinweis: Gehen Sie bei Q von der orthogonalen Rotationsmatrix $Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ aus und ermitteln Sie den Rotationswinkel φ durch die Forderung $R_{21} = 0$ (R ist obere Dreiecksmatrix!). Lösen Sie dazu zunächst die Gleichung $A - \sigma_1 I = QR$ nach R auf: $R = Q^T(A - \sigma_1 I)$.
Hinweis: Es gilt $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sowie $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

3 + 1 + 1 + 1 Punkte