Aufgabe 1. Vorgelegt sei das Funktional

$$F : C^2([-1,1]) \to \mathbb{R} \qquad F(y) = \int_{-1}^{1} \left(y(x)y'(x) + e^{(y'(x))^2} \right) dx.$$

a) Bestimmen Sie die erste Variation von F in Richtung v, wobei $v \in C^2([-1,1])$.

b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen des Funktionals F genügen.

c) Welche der folgenden Mengen ist konvex?

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ w \in C^2([-1,1]) : w^2(-1) + w^2(1) = 1 \right\}, \\ D_2 &= \left\{ w \in C^2([-1,1]) : w^2(-1) + w^2(1) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

3+2+3 Punkte

Aufgabe 2. Vorgelegt seien die Funktionen $f, g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x^{4/3}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} ,$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} ,$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/3}} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} .$$

Bekantlich ist g stetig.

a) Zeigen Sie, dass $g \in L^p([0,1])$ für alle $p \in \mathbb{R}$ mit $1 < p < \infty$.

b) Zeigen Sie, dass $h \in L^2([0,1])$.

c) Folgern Sie, dass $f \in L^2([0,1])$. Sie dürfen die Ergebnisse aus (a) und (b) ohne Beweis benutzen.

1.5 + 1.5 + 2 Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} -2x\sin(x^2) \\ ze^y \\ e^y \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot dx$ mit Hilfe der Definition, wobei

$$\gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t), t(\pi - t)\big)^T, \qquad t \in [0, \pi].$$

<u>Hinweis:</u> Die Funktion $x \mapsto x(\pi - x)$ ist gerade um $\frac{\pi}{2}$.

b) Weisen Sie nach dass f ein Potential besitzt und berechnen Sie dieses.

c) Berechnen Sie jetzt das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot dx$ mithilfe des in b) bestimmten Potentials.

3 + 3 + 1 Punkte

Aufgabe 4. Gegeben seien die Flächen $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4, x \geq 0\right\}, \quad (1) \\ F_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y^2+z^2 = 4, x \geq 0\right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

sowie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \left(\sqrt{y^2+z^2}, xe^{y^2}, \arctan x\right).$$

a) Berechnen Sie die Oberflächennormalen ν_i zu F_i, $(i \in \{1,2\})$. Die Oberflächennormalen ν_i sein mit einer positiven ersten Komponente definiert.

b) Bestimmen Sie $\int_{F_i} \mathrm{rot} f \cdot \nu \, d\sigma$, für $i \in \{1,2\}$.

2 + 3 Punkte

Aufgabe 5. Gegeben sei ein Einschrittverfahren mit

$$\phi(t,x,h) = af(t,x) + \frac{1}{4}f(t+bh, x+chf(t,x))$$

a) Geben Sie das Runge-Kutta Tableau für dieses Verfahren an. Ist das Verfahren explizit oder implizit?

b) Für welche Werte von (a,b,c) ist die Konsistenzordnung des Verfahrens mindestens 2?

c) Existieren für Parameter (a,b,c) Werte, so dass das Schema mit der speziellen Flussfunktion $f(t,x) = t^2$ von dritter Ordnung ist?

1.5 + 3.5 + 2 Punkte

Aufgabe 6. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.5 & 1.0 & -0.5 & 0 \\ 0.1 & 3 & -0.1 & 0.1 & 0 \\ -0.5 & 0.4 & 6 & 1.4 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin, dass A nur reelle Eigenwerte besitzt und schätzen Sie diese ab.

(b) Verbessern Sie die Abschätzungen von (a) durch Skalierung $\tilde{A} = D^{-1}AD$ mit der Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(3, 1, 4, 1, 1)$ und geben Sie möglichst kleine Intervalle an, in denen die Eigenwerte jeweils enthalten sind. Dabei soll auch (a) berücksichtigt werden.

3 + 3 Punkte

Aufgabe 7. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1$, mit dazugehörigem Eigenvektor $(0,0,1)^T$, $\lambda_2 = -2$ mit dazugehörigem Eigenvektor $(3,2,0)^T$ und $\lambda_3 = -3$ mit dazugehörigem Eigenvektor $(1,1,0)^T$.

a) Führen Sie einen Schritt der Vektoriteration mit dem Startvektor $\mathbf{x}_0$ in Richtung $(1,0,1)^T$ aus. Was sind die ersten Näherungswerte für den Eigenwert und den Eigenvektor. Zu welchem Eigenwert konvergiert die Methode?

b) Führen Sie einen Schritt der inversen Vektoriteration mit dem Startvektor $\mathbf{x}_0$ in Richtung $(1,0,1)^T$ und für den geschätzten Eigenwert $\lambda = 2$ aus. Was sind die ersten Näherungswerte für den Eigenwert. Zu welchem Eigenwert konvergiert die Methode?

2 + 3 Punkte

Aufgabe 8. Betrachten Sie das Adams-Bashforth Schema

$$x_{j+2} - x_{j+1} = h\left(\frac{3}{2}f_{j+1} - \frac{1}{2}f_j\right)$$

und das Anfangswertproblem

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = t + x(t),$$

mit den Anfangswerten $x(0) = 1$ und $\frac{dx}{dt}(0) = -2$.

a) Was ist die Ordnung des Schemas? Ist das Verfahren implizit oder explizit?

b) Weisen Sie nach, dass $y(t) = e^{-t} - t$ die exakte Lösung des Problems ist.

c) Zum Lösen des Anfangswertproblems mit dem oben angegebenen Adams-Bashforth Schema werden zwei Anfangswerte benötigt: $x(0)$ und $x(h)$. Welche Verfahren sind geeignet, um den Anfangswert $x(h)$ numerisch zu berechnen?

d) Überführen Sie das Anfangswertproblem in ein System von Gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

e) Sei $h = 10^{-1}$. Approximieren Sie $x(h)$ mit Hilfe des modifizierten Euler-Verfahrens, das durch das folgende Tableau gegeben ist:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

f) Berechnen Sie $x(2h)$ mit Hilfe von $x(0)$ und $x(h)$ mit dem Adams-Bashforth Schema.

1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 Punkte