Aufgabe 1. Gesucht ist eine Funktion $y \in D = \{w \in C^2([0,1]) \ : \ w(0) = w(1) = 1\}$ die das Funktional

$$F : D \to \mathbb{R}, \qquad F(y) = \int_0^1 e^{y'(x)+x} dx = \int_0^1 \exp(y'(x) + x)\, dx$$

minimiert.

a) Besimmen sie die erste Variation $\partial F(u; v)$ von $u \in D$ in Richtung v, $v \in D_0 = \{w \in C^2([0,1]) \ : \ w(0) = w(1) = 0\}$.

b) Welcher Differentialgleichung müssen die Extremalen des Funktionals F genügen?

c) Ist D konvex? Ist das Funktional F konvex? Was können Sie über globale Extremalen des Funktionals F aussagen?

2 + 2 + 3 Punkte

Aufgabe 2. Gegeben seien die Funktionen

$$f : [1,2] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$g : [1,2] \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \big(\sin(x)\big)^6.$$

a) Ist f Lebesgue-integrierbar? Ist g Lebesgue-integrierbar?

b) Zeigen Sie,

  (i) $f \in L^p([1,2])$ für $1 \leq p < 2$,

  (ii) $g \in L^p([1,2])$ für $1 \leq p$.

c) Zeigen Sie, dass $f \cdot g \in L^1([1,2])$. Sie dürfen die Ergebnisse aus Teilaufgabe b) benutzen.

d) Man gebe eine Folge $(g_k) \subset L^1([1,2])$ mit $g_k \neq g$ an, die in L^1 gegen g konvergiert (mit Begründung).

3 + 2 + 2 + 2 Punkte

Aufgabe 3. Für $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f} \,:\, D_f \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \cos z \\ \ln y \\ -x^3 \sin z \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass **f** ein Potential besitzt, und berechnen Sie dieses.

b) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot dx$$

direkt. Die Kurve γ ist dabei die Verbindung der Punkte $(0,1,0)^T$ und $(1,e,0)^T$ entlang des Graphen der Funktion $g(x) = e^x$ in der xy-Ebene.

c) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot dx$$

mit Hilfe des in a) bestimmten Potentials.

3 + 3 + 2 Punkte

Aufgabe 4. Gegeben seien die Fläche $F := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z > 0, z^2 + \left(x^2+y^2\right)^2 = 4\right\}$, und das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $(x,y,z)^T$ sei die Oberflächennormale ν so definiert, dass die dritte Komponente positiv ist.

a) Bestimmen Sie

$$\int_F \mathbf{f} \cdot \nu \, d\sigma.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass F keine geschlossene Fläche ist.

b) Bestimmen Sie

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \nu \, d\sigma.$$

Hinweis:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x), \qquad \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

5 + 4 Punkte

Aufgabe 5. Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten, und den zugehörigen Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 && \text{zum Eigenvektor } \mathbf{v}_1 = (-1, 2, 0)^T, \\ \lambda_2 &= 2 && \text{zum Eigenvektor } \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)^T, \\ \lambda_3 &= 4 && \text{zum Eigenvektor } \mathbf{v}_3 = (2, 1, 0)^T. \end{aligned}$$

a) Welcher Eigenwert würde durch die Vektoriteration mit dem Startvektor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$ approximiert?

b) Welcher Eigenwert würde durch die inverse Vektoriteration mit dem Startvektor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$ approximiert?

c) Welcher Eigenwert würde durch die inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung mit dem Startvektor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$ approximiert, wenn der Schätzwert für den Eigenwert $\mu = 1$ ist? Welchen Eigenwert würde man approximieren, wenn man $\tilde{\mathbf{v}} = (1, 3, 0)^T$ als Startvektor wählt?

d) Wie würden Sie den Eigenwert λ_2 mit Hilfe der stabilen Unterraummethode approximieren?

1 + 1 + 2 + 2 Punkte

Aufgabe 6. Die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 2\frac{y+t}{t+1}, \qquad y(0) = 0$$

wird über das Runge Kutta Verfahren

$$y_{j+1} = y_j + (1-\theta)\, h\, f\big(t_j, y_j\big) + \theta\, h\, f\big(t_{j+1}, y_{j+1}\big)$$

mit $\theta \in [0,1]$ approximiert.

a) Welches Verfahren ergibt sich bei einer Wahl von $\theta = 0$? Approximieren Sie $y(h)$ über einen Zeitschritt des Verfahrens für $\theta = 0$.

b) Welches Verfahren ergibt sich bei einer Wahl von $\theta = 1$? Approximieren Sie $y(h)$ über einen Zeitschritt des Verfahrens für $\theta = 1$.

c) Welches Verfahren ergibt sich bei einer Wahl von $\theta = \frac{1}{2}$? Approximieren Sie $y(h)$ über einen Zeitschritt des Verfahrens für $\theta = \frac{1}{2}$.

d) Welchen Wert für θ würden Sie aufgrund der bisherigen Ergebnisse empfehlen, wenn Sie wissen, dass die analytische Lösung der Differentialgleichung $y(t) = t^2$ ist? Welche Methode wäre zu nehmen, wenn man die Konsistenzordnung als Entscheidungskriterium nimmt?

1.5 + 2 + 2.5 + 2 Punkte

Aufgabe 7. Wir verwenden zum Lösen der linearen Differentialgleichung

$$y' = f(t, y) \qquad \text{mit } f(t, y) = A\, y, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

das Verfahren aus der vorherigen Aufgabe

$$y_{j+1} = y_j + (1 - \theta)\, h\, f\big(t_j, y_j\big) + \theta\, h\, f\big(t_{j+1}, y_{j+1}\big)$$

mit $\theta \in [0, 1]$ beliebig.

a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion.

b) Bestimmen Sie für $\theta = \frac{2}{3}$ den Stabilitätsbereich, und skizzieren Sie diesen.

c) Ist das Verfahren für $\theta = \frac{2}{3}$ A-stabil? Ist es L-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 + 4 + 3 Punkte

Aufgabe 8. Die Lösung des Hamilton'schen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} p' &= -q, \\ q' &= p, \end{aligned}$$

das sich aus der Hamiltonfunktion

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2, \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

ergibt, wird über das Leap-Frog Verfahren

$$\begin{aligned} p_{j+\frac{1}{2}} &= p_j - \frac{h}{2}q_j \\ q_{j+1} &= q_j + hp_{j+\frac{1}{2}} \\ p_{j+1} &= p_{j+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2}q_{j+1} \end{aligned}$$

approximiert.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Leap-Frog Verfahrens, d.h. bestimmen Sie $p_{j+1} = p_{j+1}(p_j, q_j)$ und $q_{j+1} = q_{j+1}(p_j, q_j)$.

b) Zeigen Sie, dass das Leap-Frog Verfahren die modifizierte Energie

$$\tilde{H}(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 - \frac{h^2}{8}q^2$$

erhält, d.h. zeigen Sie

$$\tilde{H}(p_{j+1}, q_{j+1}) = \tilde{H}(p_j, q_j).$$

3 + 4 Punkte