Aufgabe 1. Seien $D = \left\{ w \in C^2([-1,1]) \,:\, w(-1) = -1 \right\}$ und

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(y) = \int_{-1}^{1} \exp\left(y'(x)^2\right) \,\mathrm{d}x, \qquad y \in D.$$

a) Berechnen Sie die erste Variation $\delta F(u; v)$ des Funktionals F für $u \in D$ und $v \in H = \left\{ w \in C^2([-1,1]) \,:\, w(-1) = 0,\ w(1) = 0 \right\}$.

b) Formulieren Sie die Euler-Lagrange-Differentialgleichung für Extremalen des Funktionals F und bestimmen Sie alle Lösungen $u \in D$ derselben, die

(i) der Randbedingung $y(1) = 1$;

(ii) der natürlichen Randbedingung bei $x = 1$

genügen.

c) Sind die Mengen

$$D_0 = \{ w \in D \,:\, w \text{ erfüllt die Randbedingung (i)} \}$$

und

$$D_1 = \{ w \in D \,:\, w \text{ erfüllt die Randbedingung (ii)} \}$$

konvex? Ist F auf D_1 bzw. D_2 konvex? Wie viele Minimierer besitzt F auf D_1 bzw. D_2? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1 + 2 + 2 Punkte

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_k : J = [-\pi,\, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_k(t) = \sin\left(\frac{1}{k}t\right), \qquad t \in J,\ k \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass $f_k \in L_1(J)$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Konvergiert die Folge punktweise auf J gegen eine Funktion $f \in L_1(J)$?

c) Konvergiert die Folge gleichmäßig auf J gegen eine Funktion $f \in L_1(J)$?

d) Konvergiert die Folge in $L_1(J)$ gegen eine Funktion $f \in L_1(J)$?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

$0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5$ Punkte

Aufgabe 3. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f(x, y, z) = \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{2x}{1+x^2}, -2y\ln(1+x^2), 2z\right), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}x,$$

für den Weg $\Gamma = \gamma([-\pi, \pi])$ mit

$$\gamma : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \sqrt{1+t^2}\right), \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

4 Punkte

Aufgabe 4. Die Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$F = \left\{ (x,\, y,\, h(x,\, y)) \,:\, x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

mit der Höhenfunktion

$$h(x,\, y) = \exp\left(-\frac{1}{1 - x^2 - y^2} \right), \qquad x,\, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 < 1.$$

Weiterhin sei $\nu : F \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Einheitsnormalenfeld auf F mit $\langle \nu,\, e_3 \rangle \geq 0$ auf F. Berechnen Sie für das Vektorfeld $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das gegeben ist durch

$$f(x,\, y,\, h(x,\, y)) = \left(x - y,\, y - x,\, \sqrt{x^2 + y^2} \right), \qquad x,\, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 < 1,$$

das Flussintegral

$$\int_F \langle f,\, \nu \rangle \, \mathrm{d}\sigma.$$

4 Punkte

Aufgabe 5. Der Parameter α der Funktion

$$f(x) = \sqrt{2\alpha + x}$$

soll nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

x_i	0	3
$f(x_i)$	1,4	2,2

möglichst gut approximiert wird.

a) Formulieren Sie das nichtlineare Ausgleichsproblem.

b) Nähern Sie die Lösung an, indem Sie ausgehend vom Startwert $\alpha = 0,5$ zwei Iterationen des Gauß-Newton-Verfahrens durchführen. Zur Vereinfachung der Rechnung dürfen Sie hierbei die Näherungen

$$\sqrt{1,8} \approx 1,3 \qquad \sqrt{4,8} \approx 2,2 \qquad 6,72 \cdot \sqrt{1,8} + 3,96 \cdot \sqrt{4,8} \approx 17,94$$

verwenden.

1 + 3 Punkte

Aufgabe 6. Gesucht ist eine Näherungslösung der Gleichung

$$x - \sin\left(\frac{1+20x}{15}\right) = 0$$

im Intervall $[-1/2,\, 1/2]$.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung der Gleichung im Intervall $[-1/2,\, 1/2]$ eindeutig ist.

b) Geben Sie eine Fixpunktiteration an, die gegen diese Lösung konvergiert.

$3+1$ Punkte

Aufgabe 7. Bestimmen Sie eine Näherung für eine bei $(x_0, y_0)^\mathsf{T} = (1, 2)^\mathsf{T}$ gelegene Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2 \\ x^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Berechnen Sie dazu zwei Schritte mit dem

a) Newton-Verfahren;

b) vereinfachten Newton-Verfahren.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 8. Betrachten Sie das folgende, aus zwei Teilschritten bestehende Runge-Kutta-Verfahren:

(i) $y^{j+1/2}$ wird ausgehend von y^j durch einen Schritt des impliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h/2$ ermittelt.

(ii) y^{j+1} wird ausgehend von $y^{j+1/2}$ mit einem Schritt des expliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h/2$ ermittelt.

Ist $y^j = y(t)$, dann wird y^{j+1} als Näherung für $y(t+h)$ verwendet.

a) Ermitteln Sie das Butcher-Tableau für das Verfahren.

b) Zeigen Sie, dass das Verfahren mindestens die Konsistenzordnung *zwei* hat.

$2+1$ Punkte