Aufgabe 1. Seien $D = \{\, w \in C^2([-1,1]) \,:\, w(-1) = 1,\ w(1) = 1 \,\}$ und

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\big(xy'(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x, \qquad y \in D.$$

a) Berechnen Sie die erste Variation $\delta F(u; v)$ des Funktionals F für $u \in D$ und $v \in D_0 = \{\, w \in C^2([-1,1]) \,:\, w(-1) = 0,\ w(1) = 0 \,\}$.

b) Formulieren Sie die Euler-Lagrange-Differentialgleichung für Extremalen des Funktionals F und bestimmen Sie alle Lösungen $u \in D$ derselben.

c) Ist D konvex? Ist das Funktional F auf D konvex? Was können Sie über globale Extremalen des Funktionals F aussagen?

$1.5 + 2 + 1.5$ Punkte

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2k}, & \text{falls } -k \leq x \leq k, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

a) Man zeige, dass $f_k \in L_1(\mathbb{R})$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Man zeige, dass die Folge gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$ konvergiert.

c) Konvergiert die Folge auch in $L_1(\mathbb{R})$ gegen f?

$1 + 1 + 1$ Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = \left(2xz, 2yz, x^2 + y^2\right), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Man berechne das Arbeitsintegral

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x,$$

wobei

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

eine Parametrisierung der Schraubenlinie ist. 2.5 Punkte

Aufgabe 4. Man berechne das Volumen des Körpers K, der gegeben ist durch

$$K = \Phi(U), \qquad U = [0,\, 1] \times [-\pi,\, \pi] \times [0,\, \tfrac{\pi}{2}],$$
$$\Phi(r,\, \phi,\, \theta) = \big(r\, \cos(\phi)\, \cos(\theta),\, r\, \sin(\phi)\, \cos(\theta),\, \sqrt{3}\, r\, \sin(\theta)\big)\,, \qquad (r,\, \phi,\, \theta) \in U.$$

3 Punkte

Aufgabe 5. Man berechne den Inhalt der Fläche F, die gegeben ist durch

$$F = \Phi(B), \qquad B = [0,\, 1] \times [0,\, \pi],$$
$$\Phi(r,\, \phi) = \left(r\, \sin(\phi),\, \sqrt{2}\, r^2,\, r\, \cos(\phi)\right), \qquad (r,\, \phi) \in B.$$

3 Punkte

Aufgabe 6. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind. Dabei müssen Sie Ihre Antworten nicht begründen. Für jede richtige Antwort gibt es +0.5 Punkte, für jede falsche Antwort -0.5 Punkte. Wenn Sie zu einer Aussage keine Antwort geben, so wird dies mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt werden Sie für diese Aufgabe mindestens 0 Punkte bekommen.

3 Punkte

		richtig	falsch
a)	Explizite, konsistente, lineare Einschrittverfahren können A-stabil sein.	☐	☐
b)	Implizite, konsistente, lineare Einschrittverfahren müssen A-stabil sein.	☐	☐
c)	Ein Differentialgleichungssystem dritter Ordnung $$y'''(t) = f(t, y(t), y'(t), y''(t)), \quad t > 0$$ mit Lipschitz-stetigem $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lässt sich stets durch *sechs* Anfangsbedingungen schließen.	☐	☐
d)	Ist die rechte Seite f der betrachteten Differentialgleichung Lipschitz-stetig, so ist ein explizites, lineares Einschrittverfahren konvergent, falls es konsistent ist.	☐	☐
e)	Ist die rechte Seite f der betrachteten Differentialgleichung Lipschitz-stetig, so ist ein implizites, lineares Einschrittverfahren konvergent, falls es konsistent ist.	☐	☐
f)	Ist die rechte Seite f der betrachteten Differentialgleichung Lipschitz-stetig, so ist ein lineares Mehrschrittverfahren konvergent, falls es konsistent ist.	☐	☐

Aufgabe 7. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_A'(t) &= -c y_A(t), \quad t > 0, \\ y_B'(t) &= c y_A(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

das z.B. als einfaches Modell für den Konzentrationsverlauf chemisch reagierender Spezies A und B dienen kann. Zeigen Sie, dass

$$I : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad I(t) = y_A(t) + y_B(t)$$

eine Invariante für das Differentialgleichungssystem ist. Beweisen oder widerlegen Sie, dass das explizite, das implizite und das symplektische Euler-Verfahren diese Invariante jeweils erhalten oder nicht.

Hinweis: Das symplektische Euler-Verfahren zur Schrittweite $h > 0$ für dieses Differentialgleichungssystem folgt dem Schema

$$\begin{aligned} y_A^{j+1} &= y_A^j - chy_A^j, \\ y_B^{j+1} &= y_B^j + chy_A^{j+1}. \end{aligned}$$

2.5 Punkte

Aufgabe 8. Geben Sie für das *drei*-stufige Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y^j), \\ k_2 &= f\left(t_j + \tfrac{h}{3}, y^j + \tfrac{h}{3} k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_j + \tfrac{2h}{3}, y^j + \beta h k_1 + \tfrac{h}{3} k_2\right), \\ y^{j+1} &= y^j + \gamma_1 h k_1 + \gamma_2 h k_2 + \tfrac{3h}{2} k_3 \end{aligned}$$

das Butcher-Tableau an und bestimmen Sie die Koeffizienten β, γ_1 und γ_2 so, dass das Verfahren von der Konsistenzordnung *zwei* ist. Handelt es sich um ein explizites oder ein implizites Verfahren?

3 Punkte

Aufgabe 9. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Nutzen Sie die Determinante von A, die Struktur von A und die sich für A ergebenden Gershgorin-Kreise, um Abschätzungen für die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte von A herzuleiten.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

Hinweis: Einer der Eigenwerte ist 3.

c) Führen Sie drei Schritte der einfachen Vektoriteration (d.h. ohne Normierung in jedem Schritt) zur Approximation eines Eigenvektors zum betragsmäßig größten Eigenwert von A durch. Starten Sie dabei mit dem Vektor

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie auf Basis der dritten Approximation v_2 eine Approximation des betragsmäßig größten Eigenwertes von A an.

$1.5 + 1.5 + 2$ Punkte