Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Vertr.-Prof. Dr. Aleksey Sikstel
Dr. Lambert Theisen
Donat Weniger

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2025
Klausur | 19.08.2025

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät (permanente Tinte, kein Bleistift, kein Rotstift).
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Kopien und Druckerzeugnisse sind nicht gestattet.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 02.09.2025 von 10:00 - 10:30 Uhr im Rogowski, klPhys (1090|334) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6,5	4	6	7	5	6	7	8,5	50
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Gesucht ist eine Funktion $u \in D = \big\{ w \in C^2([0,1]) \, : \, w(0) = w(1) = w'(0) = w'(1) = 0 \big\}$, die das Funktional

$$J \, : \, D \to \mathbb{R} \, , \; J(u) = \int_0^1 \Big(\big(u''(t)\big)^2 + u'(t) \Big) dt + \lambda \int_0^1 (u(t))^2 dt$$

minimiert. Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein fester Parameter.

a) Bestimmen Sie die erste Variation $\partial J(u; v)$ von J in Richtung v, wobei $v \in D$.

b) Welcher Differentialgleichung müssen die Extremalen des Funktionals J genügen? Schreiben Sie die Differentialgleichung explizit für das gegebene Problem auf.

c) Ist D konvex? Für welche λ ist J konvex?

2+1,5+3 Punkte

Aufgabe 2.
Gegeben sei $\Omega =]0,1[$ sowie die Funktionen

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$g : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathsf{exp}(-x).$$

(a) Geben Sie eine Funktion h an mit $f \neq h$ und $h \sim f$ bzgl. der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \quad \text{fast überall auf } \Omega.$$

(b) Zeigen Sie dass
  (i) $f \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < 2$,
  (ii) $g \in L^q(\Omega)$ für $1 \leq q \leq \infty$.

(c) Folgern Sie aus (c) dass $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

1+2+1 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ \cos(y + z^2) \\ 2z \cos(y + z^2) \end{pmatrix}$$

und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin^2 t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie ein Potential von f.

(c) Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_\gamma f \cdot ds$$

(i) direkt;

(ii) mit Hilfe des Potentials aus (b).

2+2+2 Punkte

Aufgabe 4.

Sei P die Fläche

$$P := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{\pi}{2},\ \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = x_3\right\}.$$

(a) Finden Sie eine Parametrisierung von P.

(b) Geben Sie ein einfaches (also eindimensionales) Integral für den Flächeninhalt $|P|$ an. (Sie müssen das Integral nicht auswerten.)

(c) Sei

$$M := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{\pi}{2},\ 0 < x_3 < \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right\}.$$

Wenden Sie den Satz von Gauß an, um

$$\int_M \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\, dx$$

zu berechnen.

Hinweise:

(i) Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) := (0, 0, x_3 \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right))^T$.

(ii) $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$.

2+2+3 Punkte

Aufgabe 5.

Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ frei wählbare Parameter und folgendes Butcher-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ \hline & 1/4 & 1/4 & \gamma \end{array}$$

a) Ist das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren explizit oder implizit?

b) Geben Sie Parameter α^*, γ^* an, sodass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren konsistent mit Ordnung 2 ist. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

c) Führen Sie einen einzelnen Schritt des Verfahrens mit den Parametern α^*, γ^* mit generischer Schrittweite $h > 0$ für das Anfangswert-Problem:

$$y'(t) = y(t), \quad y_0 = y(0) = 1$$

aus. Wir nennen das Ergebnis des Verfahrens y_1. Welche Größenordnung $\mathcal{O}(h^{p+1})$ hat der Fehler $|y(h) - y_1|$ in diesem konkreten Fall? Ist das Verfahren konsistent von Ordnung $p = 3$?

> **Hinweis:** Vergleichen Sie das Ergebnis des Runge–Kutta Verfahrens mit der Taylor–Reihenentwicklung der exakten Lösung des Anfangswertproblems.

1+2+2 Punkte

Aufgabe 6.

a) Vorgelegt sei das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{4} & \beta \\ \frac{2}{3} & \alpha & \frac{5}{12} \\ \hline & \frac{1}{4} & \gamma \end{array}$$

Bestimmen Sie α, β, γ so, dass das zugehörige RK-Verfahren invariant gegenüber Autonomisierung, sowie konsistent mit mindestens Ordnung 2 ist.

b) Betrachten Sie das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}.$$

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion R des zugehörigen RK-Verfahrens. Ist das Verfahren A-Stabil?

3+3 Punkte

Aufgabe 7.

a) Die Singulärwertzerlegung (SVD) der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch

$$A = U\Sigma V^T. \tag{1}$$

Berechnen Sie die Matrix Σ explizit. Welche Dimension und welche besondere Eigenschaft haben die Matrizen U und V? In welchem Zusammenhang stehen die Spalten von U und V mit den Eigenvektoren der quadratischen Matrizen A^TA und AA^T? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Die Matrizen U, V müssen nicht explizit berechnet werden.

b) Sei $A_2 \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ die optimale Rank-2 SVD-Komprimierung von A im Sinne von

$$A_2 = \arg \min_{\substack{B\in\mathbb{R}^{4\times 3} \\ \text{rank}(B)=2}} \|A - B\|_2,$$

wobei die Spektralnorm einer reellen Matrix gegeben ist durch

$$\|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\text{max}}(A^TA)}.$$

Geben Sie zuerst eine abstrakte Darstellung von A_2 in Abhängigkeit der Einträge von Σ und den Spalten von U sowie V an (Es ist keine explizite Berechnung notwendig). Berechnen Sie nun explizit den Fehler $\|A - A_2\|_2$ mit den Ergebnissen des ersten Aufgabenteils.

c) Geben Sie die Definition der Pseudoinversen von A an und zeigen Sie, wie diese in der Methode der kleinsten Quadrate (Least squares approximation) für Probleme der Form

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}, b \in \mathbb{R}^4$ benutzt werden kann, um die Least Squares Lösung zu erhalten. Zeigen Sie dann mathematisch, dass der von Ihnen vorgeschlagene Lösungsweg in der Tat die Least Squares Lösung liefert.
Hinweis: Ein Vektor y wird als Least Squares Lösung bezeichnet, wenn er die Normalengleichung $A^TAy = A^Tb$ löst.

3+2+2 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Wir werden zeigen, dass das standard Newton-Verfahren für Optimierung

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}, \quad d^{(k)} = -\left(\nabla^2 f\left(x^{(k)}\right)\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(k)}\right) \tag{2}$$

nicht für alle Startpunkte $x^{(0)}$ konvergiert. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ gegeben.

a) Skizzieren Sie die Funktion f.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen ∇f und $\nabla^2 f$ und zeigen Sie, dass $d^{(k)}$ eine gültige Abstiegsrichtung ist.

c) Leiten Sie die Menge aller Startpunkte her, für die das Verfahren (2) mit $\alpha_k = 1$ konvergiert.

d) Setzen Sie $\alpha_k = 1/2$ und führen Sie einen Schritt des Algorithmus mit Startpunkt $x^{(0)} = -3/2$ aus.

e) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus c) und d).

1+2+2,5+2+1 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.:

Name: Mat-Nr.:

Viel Erfolg!