Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Dr. Robert Speck

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2024
Klausur | 19.08.2024

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 10.09.2024 von 15:00-16:00 Uhr im Eph (1090|321) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	6	6	7	6	6	6	7	50
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional $F : D \to \mathbb{R}$ mit

$$F(y) = \int_{-1}^{1} y(x) \log\big(y(x)\big) \,\mathrm{d}x$$

und $D = \{w \in C^2[-1,1] : w(x) \geq \frac{1}{2e}\}$. Dabei bezeichnet log den natürlichen Logarithmus.

(a) Ist D konvex? Ist F konvex?

(b) Geben sie eine Gleichung an, der die Extremale des Funktionals F genügen.

(c) Bestimmen Sie einen Kandidaten für ein Extremum. Liegt ein globales Extremum vor?

2+3+1 Punkte

Aufgabe 2.

Sei Γ die Kurve mit der Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.
Hinweis:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right)$$

b) Welches dieser Vektorfelder

$$F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 2x_1^3 x_2^2 \exp(x_1^4 x_2^2) \\ x_1^4 x_2 \exp(x_1^4 x_2^2) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad G(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

besitzt ein Potential? Berechnen Sie dieses Potential.

c) Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $\int_\Gamma F \cdot dx$ beziehungsweise $\int_\Gamma G \cdot dx$. Sie dürfen das Potential benutzen.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei $\Omega =]0,1[$ sowie die Funktionen

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$g : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \exp(-x).$$

(a) Ist g Lebesgue-messbar? Ist g Lebesgue-integrierbar?

(b) Geben Sie eine Funktion h an mit $f \neq h$ und $h \sim f$ bzgl. der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \quad \text{fast überall auf } \Omega.$$

(c) Zeigen Sie dass
   (i) $f \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < 2$,
   (ii) $g \in L^q(\Omega)$ für $1 \leq q \leq \infty$.

(d) Folgern Sie aus (c) dass $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

2+1+2+1 Punkte

Aufgabe 4.

Sei P die Fläche

$$P := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{\pi}{2},\ \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = x_3\right\}.$$

(a) Finden Sie eine Parametrisierung von P.

(b) Geben Sie ein einfaches (also eindimensionales) Integral für den Flächeninhalt $|P|$ an. (Sie müssen das Integral nicht auswerten.)

(c) Sei

$$M := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{\pi}{2},\ 0 < x_3 < \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right\}.$$

Wenden Sie den Satz von Gauß an, um

$$\int_M \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\, dx$$

zu berechnen.

Hinweise:

(i) Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) := (0, 0, x_3 \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right))^T$.

(ii) $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$.

2+2+3 Punkte

Aufgabe 5.

Man betrachte das Einzelschrittverfahren

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\big(f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)\big) \tag{1}$$

zur Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = f(x, y(x)), y(0) = y_0$.

(a) Definieren Sie den lokalen Entwicklungsfehler des Verfahrens (1) und schätzen Sie ihn ab.

(b) Zeigen Sie, dass der Entwicklungsfehler für das folgende Mehrschrittverfahren von gleicher Ordnung wie der des Einzelschrittverfahrens (1) ist:

$$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \tag{2}$$

(c) Nennen Sie die Konsistenzbedingung eines linearen Mehrschrittverfahrens und überprüfen Sie diese für das Schema (2).

(d) Welche Aussage bezüglich der Stabilität der beiden Verfahren (1) und (2) können Sie treffen? Begründen Sie Ihre Aussagen.

1.5+1.5+1+2 Punkte

Aufgabe 6.

a) Vorgelegt sei das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{4} & \beta \\ \frac{2}{3} & \alpha & \frac{5}{12} \\ \hline & \frac{1}{4} & \gamma \end{array}$$

Bestimmen Sie α, β, γ so, dass das zugehörige RK-Verfahren invariant gegenüber Autonomisierung, sowie konsistent mit mindestens Ordnung 2 ist.

b) Betrachten Sie das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}. \end{array}$$

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion R des zugehörigen RK-Verfahrens. Ist das Verfahren A-Stabil?

3+3 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gershgorin eine möglichst kleine Menge an, in der die Eigenwerte von A enthalten sind.

(b) Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens zur Eigenwertbestimmung mit der Matrix A aus.

2+4 Punkte

Aufgabe 8.
Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \left((x_3^2 - 1)^2 + (x_1^2 - x_2)^2 + (2 - x_1)^2 \right) =: \min_{x \in \mathbb{R}^3} f(x).$$

a) Berechnen Sie $\nabla f(x)$.

b) Bestimmen Sie alle Minima von f und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein globales oder lokales Minimum handelt.

c) Untersuchen Sie jeweils, ob es sich bei den Vektoren

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

um valide Abstiegsrichtungen im Punkt

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

handelt.

d) Berechnen Sie einen Iterationsschritt der Gradient Descent Methode (Verfahren des steilsten Abstiegs) mit dem Startvektor

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

und der optimalen Schrittweite α_0, die durch klassische Liniensuche bestimmt wird.

1+2+2+2 Punkte

Name: Mat-Nr.: