Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Dr. Robert Speck
Edilbert Christhuraj
Andrea Hanke

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2023
Klausur | 14.08.2023

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 28.08.2023 von 10:00 - 12:00 Uhr im 1090|328 (Rogowski, 3. Etage, Seminarraum) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	5	5	5	10	6	6	6	7	50
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Vorgelegt sei das folgende Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

(a) Führen Sie für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= t\ \sin(x(t)) \\ x(0) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

und die Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{2}$ einen Schritt des durch das Butcher-Tableau gegebenen Runge-Kutte-Verfahrens aus.

(b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens aus (a) direkt durch Taylorentwicklung.

(c) Konvergiert das Verfahren aus (a) für $\Delta t \to 0$ gegen die exakte Lösung des AWPs?

2+2+1 Punkte

Aufgabe 2.

Betrachten Sie die sogenannte Differentiell-Algebraische Gleichungen (DAEs)

$$\begin{aligned} y' &= y + 5z, \\ 0 &= z - y. \end{aligned}$$

Diese kann als System singulär gestörter gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y' &= y + 5z, \\ \epsilon z' &= z - y, \qquad\qquad 0 < \epsilon \ll 1, \end{aligned}$$

analysiert werden.

a) Zeigen Sie: Die Ausgangs-DAE kann in eine gewöhnliche Differentialgleichung umgewandelt werden. Geben Sie die analytische Lösung dieser für $y(t_0) = y_0$ an. Ist die Differentialgleichung steif?

b) Zeigen Sie: Die singulär gestörte Lösung ist steif. Betrachten Sie dazu den Grenzwert $\epsilon \to 0$.

2+3 Punkte

Aufgabe 3.

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hat die Matrix A nur reelle Eigenwerte? Begründen Sie ihre Antwort. Leiten Sie ferner mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin eine obere Schranke für den größten Eigenwert und eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert dieser Matrix her.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und

$$B = \begin{pmatrix} n(n+1) & 1 & 2 & \dots & n \\ n & n(n+1) & 1 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & n(n+1) & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n & n(n+1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix B regulär ist.

3+2 Punkte

Aufgabe 4.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x.$$

a) Hat f ein globales Minimum?

b) Ist f konvex?

c) Ist das Minimum (sofern es existiert) eindeutig?

d) Betrachten Sie die Liniensuche $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$, wobei Sie die Suchrichtung $d^{(k)}$ mittels der Methode des steilsten Abstieges bestimmen. Geben Sie $d^{(k)}$ an.

e) Bestimmen Sie das optimale (größter Abstieg) α_k.

f) Wie sehen die Wolfe-Bedingungen für die zulässige Schrittweite für dieses Verfahren (f, $d^{(k)}$) aus? Vereinfachen Sie so weit wie möglich ($d^{(k)}$ ist zu wählen wie oben).

2+1+1+1+2+3 Punkte

Aufgabe 5.

Sei Vektorraum $D = \{y \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \,:\, y(0) = y(1) = 0\}$ und die Funktionale

$$F : \begin{cases} D \to \mathbb{R}, \\ y \mapsto F(y) := \int\limits_0^1 \left(y'^2(x) - y^2(x)\right) dx, \end{cases}$$

und

$$G : \begin{cases} D \to \mathbb{R}, \\ y \mapsto G(y) := \int\limits_0^1 \left(y'(x) + y(x) \cdot \tan(x)\right)^2 dx. \end{cases}$$

Wir würden bestimmen, dass $F(y) \geq 0$ für alle $y \in D$ ist.

a) Berechnen Sie $F(f)$, wobei f gegeben durch

$$f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto f(x) := x - x^2. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie, dass für alle $y \in D$ gilt: $F(y) = G(y)$ und daher $F(y) \geq 0$.

> **Hinweis:** Integration in Teilstücken.

c) Berechnen Sie die Euler-Lagrange DGL für F. Was sind die Lösungen der resultierende DGL?

d) Berechnen Sie die alle locale Extrema für F.

> **Hinweis:** Nutzen Sie die Lösung der DGL von Teil c) und der gegebene Vektorraum D .

2+2+1+1 Punkte

Aufgabe 6.

Betrachten Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = (2xy, x^2, 2z),$$

und

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), ht)^\top$$

und $h \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Arbeitsintegral auf zwei verschiedene Arten:

a) Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma f \cdot dx$ mit der folgenden Definition

$$\int_\gamma f \cdot dx = \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

b) Zeigen Sie, dass f ein Potential $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt und benutzen Sie die Identität

$$\int_\gamma f \cdot dx = \phi(\gamma(2\pi)) - \phi(\gamma(0)).$$

3+3 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei $\Omega =]0, 1[$ sowie die Funktionen

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$g : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \exp(-x).$$

(a) Ist g Lebesgue-messbar? Ist g Lebesgue-integrierbar?

(b) Geben Sie eine Funktion h an mit $f \neq h$ und $h \sim f$ bzgl. der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \quad \text{fast überall auf } \Omega.$$

(c) Zeigen Sie dass
   (i) $f \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < 2$,
   (ii) $g \in L^q(\Omega)$ für $1 \leq q \leq \infty$.

(d) Folgern Sie aus (c) dass $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

2+1+2+1 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ wie folgt

$$\boldsymbol{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ (x, y) \mapsto \boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ y^2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

und gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Punkte $(0, 0), (1, 0)$ und $(1, 2)$.

a) Berechnen Sie das Arbeitsintegral entlang des Dreiecks.
Hat das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ ein Potential?

b) Formulieren Sie den Satz von *Gauss*, und
benennen Sie die jeweiligen Terme und Objekte.

c) Weisen Sie den Satz von *Gauss* anhand des obigen Vektorfeldes $\boldsymbol{f}$ und
dem Dreieck Ω nach.

3+1+3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Viel Erfolg!