

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2022
Klausur | 16.08.2022

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am TODO von TODO Uhr im ACOM Seminarraum (1090|328), 3. Etage im Rogowski-Gebäude statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt	
	+		=		

Note:

Aufgabe 1.

Gesucht ist eine Funktion $y \in D$ mit

$$D := \{w \in C^2([0, 1]) : w(0) = w(1) = 1\},$$

die das Funktional

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(y) = \int_0^1 \left((y'(t))^2 + e^{ay(t)} \right) dt,$$

welches von einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$ abhängt, minimiert.

- a) Bestimmen Sie die erste Variation $\partial F(y; v)$ von F in Richtung v ,
 $v \in D_0 := \{w \in C^2([0, 1]) : w(0) = w(1) = 0\}$.
- b) Welcher Differentialgleichung müssen die Extremalen des Funktionals F genügen?
- c) Ist D konvex? Ist das Funktional F konvex? Was können Sie über globale Extremalen des Funktionals F aussagen? Gibt es eine Lösung für $a = 0$?

X Punkte

Name:

Matriculation-Nr.:

Aufgabe 2.

Es sei $\Omega := (0, \infty)$ und $x \in \Omega$.

a) Gegeben sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}, & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie $f \notin L^1(\Omega)$ aber $f \in L^2(\Omega)$.

b) Gegeben sei $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}, & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie $g \in L^1(\Omega)$ aber $g \notin L^2(\Omega)$.

c) Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung in der Form

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}},$$

um das folgende Integral abzuschätzen:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^4}} e^{-\frac{2}{3}x} dx$$

2+2+3 = 7 Punkte

Name:

Matriculation-Nr.:

Aufgabe 3.

Gegeben sei $\Omega =]0, 1[$ sowie die Funktionen

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \exp(-x).$$

- (a) Ist g Lebesgue-messbar? Ist g Lebesgue-integrierbar?
- (b) Geben Sie eine Funktion h an mit $f \neq h$ und $h \sim f$ bzgl. der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \quad \text{fast überall auf } \Omega.$$

(c) Zeigen Sie dass

- (i) $f \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < 2$,
- (ii) $g \in L^q(\Omega)$ für $1 \leq q \leq \infty$.

(d) Folgern Sie aus (c) dass $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

2+1+2+1 = 6 Punkte

Name:

Matriculation-Nr.:

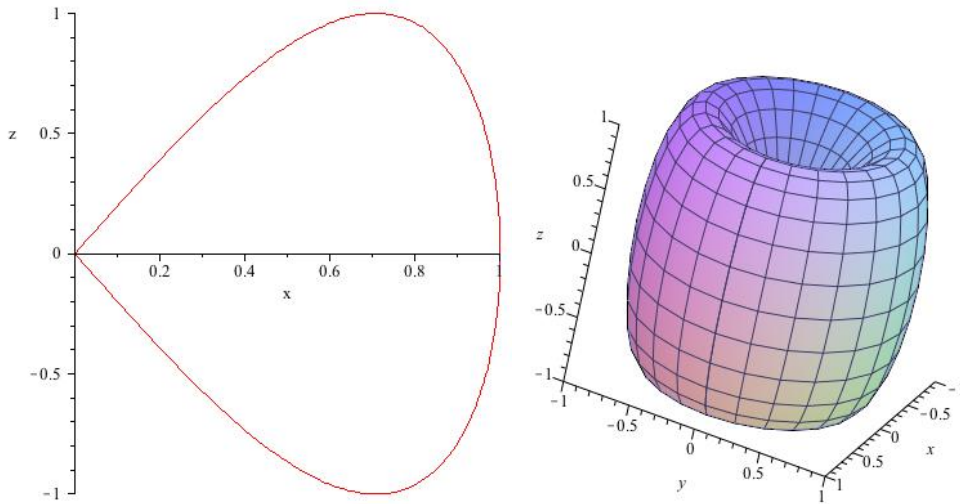
Aufgabe 4.

TODO: Mehr Hinweise, Aufgabe feiner untergliedern Sei S die durch Rotation der Kurve

$$\begin{aligned} r &= \cos u, & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ z &= \sin 2u, \end{aligned}$$

um die z -Achse bestimmte Oberfläche (vergleiche Abbildung).

Nutzen Sie das Divergenz-Theorem um das Volumen des Gebietes innerhalb von S zu bestimmen.



Hinweis 1: Benutzen Sie ein Vektorfeld f mit $\nabla \cdot f = 1$.

Hinweis 2: Stammfunktion $\frac{d}{dx} \frac{1}{16} (4x - \sin 4x) = \sin 2x \cos x \sin x$.

X Punkte

Name:

Matriculation-Nr.:

Aufgabe 5.

TODO: zusätzlich (falls insgesamt zu "wenig") einer weiteren Teilaufgabe einen Schritt des RK für eine simple RHS durchführen zu lassen Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ frei wählbare Parameter und folgendes Butcher-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \beta & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \gamma \end{array}$$

- Ist das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren explizit oder implizit?
- Geben Sie Parameter $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ an, sodass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren invariant gegenüber Autonomisierung und konsistent mit der Ordnung 1 ist. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- Hat das Runge-Kutta-Verfahren mit den Parametern $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ (von Aufgabenteil b)) sogar Konsistenzordnung 2?

X Punkte

Name:

Matriculation-Nr.:

Aufgabe 6.

TODO: Vielleicht Vorzeichen in RHS des LMM ändern? Teile a und b unverändert, Teil c: Sei $\alpha_1 = -1 - c$. Für welche Werte von c ist die Konvergenz des Verfahrens garantiert. Hinweise: Sie dürfen annehmen, dass die Funktion f hinreichend regulär ist Wir betrachten das lineare Mehrschrittverfahren

$$y_{j+2} + \alpha_1 y_{j+1} + c y_j = h(\beta_2 f_{j+2} + \beta_1 f_{j+1} + \beta_0 f_j)$$

wobei $f_j = f(t_j, y_j)$ und c ein frei zu wählender Parameter sei.

- a) Bestimmen Sie $\alpha_1, \beta_2, \beta_1$ und β_0 in Abhängigkeit von dem Parameter c , so dass das Verfahren konsistent von der Ordnung 3 ist.
- b) Gibt es einen Wert für c , so dass das Verfahren konsistent von der Ordnung 4 ist?
- c) Sei $\alpha_1 = -1 - c$. Für welche Werte von c ist das Verfahren null-stabil? Was können Sie über die Konvergenz des Verfahrens dann aussagen?

X Punkte

Name:

Matriculation-Nr.:

Aufgabe 7.

TODO: (Teil a etwas umformulieren), Teil c als: Zeigen Sie, dass (...) invertierbar ist, und mit zusätzlichem Teil d) Geben Sie ein iteratives Verfahren zur Bestimmung des betragsmäßig kleinsten Eigenwerts der Matrix $A(\epsilon)$ mit $\epsilon = 0,6$ an und führen Sie eine Iteration mit Startwert $x_0 = (\dots)$ durch. Gegeben sei die gestörte Matrix

$$A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 13 + \epsilon & 5 & \epsilon - 5 \\ -6 & 2 - \epsilon & \epsilon - 6 \\ -11 + \epsilon & -11 + \epsilon & 7 \end{pmatrix}$$

- (a) Schätzen Sie die Eigenwerte der gestörten Matrix $A(\epsilon)$ mittels des Satzes von Bauer-Fike in Abhängigkeit von der Störung $\epsilon \in \mathbb{R}$ ab. Verwenden Sie hierfür die 1-Norm. Es existiert hierfür eine sinnvolle Dekomposition $A(\epsilon) = M + S(\epsilon)$ für die die Matrix $D = T^{-1}MT$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist. Nutzen Sie diese Dekomposition.

- (b) Benutzen Sie die in Aufgabe (a) gewonnene Abschätzung

$$\sigma(A(\epsilon)) \subseteq \{x : |x + 4| \leq 6|\epsilon|\} \cup \{x : |x - 8| \leq 6|\epsilon|\} \cup \{x : |x - 18| \leq 6|\epsilon|\}$$

um ϵ so zu bestimmen, dass 0 kein Eigenwert der Matrix A sein kann.

- (c) Ist die Matrix $A(\epsilon)$ für $\epsilon = \frac{3}{5}$ invertierbar?

X Punkte

Name:

Matriculation-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2 - 3x + 2y + 4$$

sowie der Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

- (a) Besitzt f ein eindeutiges Minimum $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$?
- (b) Bestimmen Sie im Punkt (x_0, y_0) eine Abstiegsrichtung für f , d.h. einen Vektor $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta) \leq f(x_0, y_0)$$

für hinreichend kleines $t > 0$.

- (c) Minimieren Sie f entlang der in (b) bestimmten Abstiegsrichtung, d.h. bestimmen Sie $t^* \geq 0$, so dass

$$f(x_0 + t^*\xi, y_0 + t^*\eta) < f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta)$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

- (d) Bestimmen Sie aus (c) eine neue Approximation für die Minimalstelle von f .

X Punkte

Name:

Matriculation-Nr.:

Name:

Matriculation-Nr.:

Name:

Matriculation-Nr.:

Name:

Matriculation-Nr.:

