Prof. Dr. Benjamin Stamm
Jun.-Prof. Dr. Håkon Hoel

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2021
Klausur | 26.07.2021

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 10.08.2021 von 16:00-17:00 Uhr im Eph (1090|321) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	7	6.5	6.5	5	8	5	6	6	50
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional $F : D \to \mathbb{R}$ mit

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(|u'(x)|^2 + \frac{\alpha}{2}\left(|u(x)|^2 - 1\right)^2 \right) dx$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und

$$D := \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$$

ist.

(a) Sei $v \in H$ mit $H = \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Berechnen Sie die erste Variation von F im Punkt u in die Richtung v.

(b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen von F genügen.

(c) Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung mit den durch D vorgegebenen Randbedingungen an.

(d) Ist die Menge D konvex?

2+2+2+1 Punkte

Aufgabe 2.

Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_{>1}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ nx - \frac{n}{2} + 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\{f_n\}_n \subset L^1([0,1])$.

(b) $\{f_n\}_n$ ist eine Cauchy-Folge.

(c) f_n konvergiert gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

in $L^1([0,1])$.

(d) Analysieren Sie die Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

1.5+1.5+1.5+2 Punkte

Aufgabe 3.

Sei $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))^T$ eine Parametrisierung und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ein Gebiet mit äußerer Normale $\nu(x, y) = (x, y)^T$. Betrachten Sie die Felder

$$F(x, y) = (x, 2y)^T,$$
$$G(x, y) = \frac{1}{|x^2 + y^2|}(-2y, x)^T.$$

a) Berechnen Sie die Arbeitsintegral $\int_\gamma F \cdot dx$ sowie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \cdot \nu dx$.

b) Berechnen Sie die Arbeitsintegral $\int_\gamma G \cdot dx$ sowie das Kurvenintegral $\int_\gamma G \cdot \nu dx$.

c) Überprüfen Sie den Satz von Gauß für F, d.h. die Identiät

$$\int_B \mathrm{div}(F) dS = \int_\gamma F \cdot \nu dx. \tag{1}$$

d) Sind F und G konservative Vektorfelder? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.5+1.5+1.5+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 4.
Sei P die Fläche

$$P := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 3,\ x_1^2 + x_2^2 < 3\right\}.$$

(a) Finden Sie eine Parametrisierung für P.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|P|$.

(c) Sei M das Volumen zwischen der Fläche P und der Ebene $\{x_3 = 0\}$. Wenden Sie den Satz von Gauß an, um

$$\int_M \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx$$

zu berechnen.
Hinweis: Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) := (0, 0, x_3 \sin(x_1^2 + x_2^2))^\top$.

1+2+2 Punkte

Aufgabe 5.

(a) Beschreiben Sie, was ein s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren ist und wie es mithilfe der Koeffizienten (b, c, A) in einem Butcher-Tableau zusammengefasst werden kann.

(b) Erklären Sie den Unterschied zwischen expliziten und impliziten Einschrittverfahren. Wie kann man explizite und implizite Runge-Kutta-Verfahren anhand der Struktur der Matrix A unterscheiden?

(c) Wir betrachten das Einschrittverfahren

$$x_{j+1} = x_j + h\Psi(t_j, x_j, h)$$

mit

$$\Psi(t_j, x_j, h) = \Big(b_1 f(t_j, x_j) + b_2 f\Big(t_j + h,\ x_j + hk_1\Big) + b_3 f\Big(t_j + \frac{h}{2},\ x_j + \frac{k_1 + k_2}{4}h\Big)\Big)$$

und

$$k_1 = f(t_j, x_j) \quad \text{sowie} \quad k_2 = f(t_j + h, x_j + hf(t_j, x_j)).$$

Für welche Werte von $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das Verfahren konsistent?

(d) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion (en: amplification function) für den Fall $(b_1, b_2, b_2) = (1/2, 1/2, 0)$ und entscheiden Sie, ob das Verfahren A-stabil ist.

(e) Bestimmen Sie die (eindeutigen) Werte für b_1, b_2, b_3, für die das Verfahren Konsistenzordnung drei hat.

Hinweis: Sie können verwenden, dass

$$\begin{aligned} &f\Big(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{f(t, x(t)) + f(t + h, x(t) + hf(t, x(t)))}{4}h\Big) \\ &\qquad = f(t, x(t)) + \frac{f_t + f_x f}{2}h + \frac{f_{tt} + 2f_{tx}f + f_{xx}f^2 + 2f_x f_t + 2(f_x)^2 f}{8}h^2 + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

ist. Hier wurde die Abkürzung $f_t + f_x f$ für $f_t(t, x(t)) + (f_x f)(t, x(t))$ usw. verwendet.

1+1+1+2+3 Punkte

Aufgabe 6.

(a) Definieren Sie, was ein lineares Mehrschrittfverfahren mit m Schritten (en: m-step linear multistep method, LMM) ist.

(b) Erklären Sie, warum ein Mehrschrittfverfahren der Konsistenzordnung p oft in der Berechnung kosteneffizienter (en: more computationally efficient) ist als ein Einschrittverfahren der entsprechenden Konsistenzordnung.

(c) Wir betrachten das Mehrschrittfverfahren

$$x_{j+2} = x_{j+1} + h\Big(\beta_1 f(x_{j+1}) - \frac{1}{2} f(x_j)\Big)$$

mit $f_j := f(x_j)$ und einem Wert von β_1 so, dass das Verfahren konsistent ist. Bestimmen Sie den Wert von β_1 und zeigen Sie, dass das Verfahren sogar Konsistenzordnung zwei hat.

(d) Wir betrachten eine numerische Approximation des Anfangswertsproblems

$$\dot{x} = -x^2 \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1.$$

Berechnen Sie eine Iteration des LMM

$$x_{j+2} = \frac{4}{3}x_{j+1} - \frac{1}{3}x_j + \frac{2h}{3}f(x_{j+2})$$

mit $h = 1/2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1/2$ und $f(x) = -x^2$.

1+1+2+1 Punkte

Aufgabe 7.

a) Die Singulärwertzerlegung (SVD) der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch

$$A = U\Sigma V^T. \qquad (2)$$

Berechnen Sie die Matrix Σ explizit. Welche Dimension und welche besondere Eigenschaft haben die Matrizen U und V? In welchem Zusammenhang stehen die Spalten von U und V mit den Eigenvektoren der quadratischen Matrizen A^TA und AA^T? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Die Matrizen U, V müssen nicht explizit berechnet werden.

b) Sei $A_2 \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ die optimale Rank-2 SVD-Komprimierung von A im Sinne von

$$A_2 = \arg \min_{\substack{B\in\mathbb{R}^{4\times 3} \\ \text{rank}(B)=2}} \|A - B\|_2,$$

wobei die Spektralnorm einer reellen Matrix gegeben ist durch

$$\|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}.$$

Geben Sie zuerst eine abstrakte Darstellung von A_2 in Abhängigkeit der Einträge von Σ und den Spalten von U sowie V an (Es ist keine explizite Berechnung notwendig). Berechnen Sie nun explizit den Fehler $\|A - A_2\|_2$ mit den Ergebnissen des ersten Aufgabenteils.

c) Geben Sie die Definition der Pseudoinversen von A an und zeigen Sie, wie diese in der Methode der kleinsten Quadrate (Least squares approximation) für Probleme der Form

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}, b \in \mathbb{R}^4$ benutzt werden kann, um die Least Squares Lösung zu erhalten. Zeigen Sie dann mathematisch, dass der von Ihnen vorgeschlagene Lösungsweg in der Tat die Least Squares Lösung liefert.
Hinweis: Ein Vektor y wird als Least Squares Lösung bezeichnet, wenn er die Normalengleichung $A^TAy = A^Tb$ löst.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 8.

Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} \left((x_3^2-1)^2+(x_1^2-x_2)^2+(2-x_1)^2\right) =: \min_{x\in\mathbb{R}^3} f(x).$$

a) Berechnen Sie $\nabla f(x)$.

b) Bestimmen Sie alle Minima von f und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein globales oder lokales Minimum handelt.

c) Untersuchen Sie jeweils, ob es sich bei den Vektoren

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

um valide Abstiegsrichtungen im Punkt

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

handelt.

d) Berechnen Sie einen Iterationsschritt der Gradient Descent Methode (Verfahren des steilsten Abstiegs) mit dem Startvektor

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

und der optimalen Schrittweite α_0, die durch klassische Liniensuche bestimmt wird.

1+2+1+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: