Prof. Dr. Benjamin Stamm
Dr. Alexander Litvinenko

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2020
Klausur | 11.08.2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 24.08.2020 von 16:00–17:00 Uhr im Eph (1090|321), Rogowski Gebäude, Schinkelstraße 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt" an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$
Punkte	6	7	9	8	3	3	4	6	7	5	2	60
Ihre Punkte												

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Sei $E(x) = -\dfrac{x}{\|x\|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(a) Sei $\Omega_\epsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon \epsilon < \|x\| < 1\right\}, \quad$ für $0 < \epsilon < 1$.

Berechnen Sie

$$\int_{\Omega_\epsilon} \text{div}E(x)\, d\mathbf{x}.$$

(b) Sei

$$\begin{aligned}\Gamma \colon [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^3\\ \theta &\mapsto \Gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)\,.\end{aligned}$$

Berechnen Sie

$$\int_\Gamma E \cdot ds \qquad \text{und} \qquad \int_\Gamma E \cdot \eta(s) ds,$$

wobei $\eta(s)$ der auf der Einheitskugel nach außen zeigende Einheitsnormalenvektor ist.

(c) Sei

$$C = \left\{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \|\vec{x}\| = 1,\ z \geq 0\right\},$$

die nördliche Hemisphäre der Einheitskugel und

$$F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xz \\ -z^2 + y^2 \\ -x^2 + z^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_C \text{rot}(F) \cdot \eta(s) ds.$$

2+2+2 = 6 Punkte

Aufgabe 2.

Sei $f_n\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f_n \in L^1\big([-\pi,\pi]\big)$. Analysieren Sie ob die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Nullfunktion in $L^1\big([-\pi,\pi]\big)$ konvergiert.

(b) Analysieren Sie ob die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Nullfunktion konvergiert im Sinne

  (i) der punktweisen Konvergenz;

  (ii) der gleichmäßigen Konvergenz.

(c) Analysieren Sie ob die Funktionenfolge $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Nullfunktion konvergiert im Sinne

  (i) der punktweisen Konvergenz;

  (ii) der gleichmäßigen Konvergenz.

2+3+2 = 7 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Funktional $F\colon D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(u,\lambda) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\big(u'(x)\big)^2 + x^2\big(u(x)\big)^2 + \frac{\alpha}{2}\big(u(x)\big)^4 \right)\, dx - \lambda \left(\int_{-1}^{1} \big(u(x)\big)^2\, dx - 1 \right),$$

wobei $\alpha > 0$ ein Parameter ist und

$$D = \big\{ u \in C^2\big([-1,1]\big) \colon u(-1) = u(1) = 0 \big\}\,.$$

(a) Sei $(v,\mu) \in D \times \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Richtungsableitung von F an der Stelle $(u,\lambda) \in D \times \mathbb{R}$ in der Richtung (v,μ).

(b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen von F genügen.

(c) Ist F konvex bezüglich λ (für alle $u \in D$)? Ist F konvex bezüglich u (für alle $\lambda \in \mathbb{R}$)?

2+4+3 = 9 Punkte

Aufgabe 4.
Sei

$$M = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 > 0; |x_2| < x_1\right\},$$

und

$$f_\beta(x, y) = |x_1 + x_2 + 1|^\beta \cdot |x_1 - x_2 + 1|^\beta,$$

wobei $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

(a) Für welche $p \in [1, \infty)$ gilt $f_\beta \in L^p(M)$ für beliebiges aber fixes $\beta \in \mathbb{R}$?

(b) Berechnen Sie die p-Norm $\|f_\beta\|_p$ auf M für alle $p \in [1, \infty)$, für die $f_\beta \in L^p(M)$ gilt.

Hinweis: Koordinatentransformation.

8 Punkte

Aufgabe 5.
Die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

kann numerisch mit folgendem expliziten Schema gelöst werden:

$$y^{j+1} = y^j + \frac{h}{2}\Big[f(t^j, y^j) + f(t^{j+1}, y^j + hf(t^j, y^j))\Big].$$

Wie ist die Konsistenzordnung für dieses Schema?

3 Punkte

Aufgabe 6.

Zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

betrachten wir das Verfahren von Heun mit Schrittweite h

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f\big(t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k)\big)].$$

(a) Schreiben Sie das Verfahren als Runge-Kutta Verfahren mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}.$$

Ist das Verfahren explizit oder implizit?

(b) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $g(z)$.

Hinweis: Die Stabilitätsfunktion erhält man durch Anwendung des Verfahrens auf das Testproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = y_0.$$

2+1 = 3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Betrachten Sie das skalare Anfangswertproblem, das als

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

spezifiziert ist. Geben Sie für die folgenden Verfahren das jeweilige Butcher-Tableau an:

a) Explizites Euler-Verfahren,

b) Implizites Euler-Verfahren,

c) Explizite Trapezregel,

d) Implizite Trapezregel.

1+1+1+1 = 4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Betrachten Sie das skalare Anfangswertproblem

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Zeichnen Sie die Stabilitätsregionen für die folgenden Verfahren:

a) Explizites Euler-Verfahren,

b) Implizites Euler-Verfahren,

c) Implizite Trapezregel.

2+2+2 = 6 Punkte

Aufgabe 9.

Gegeben sei die gestörte Matrix

$$A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 13+\epsilon & 5 & \epsilon-5 \\ -6 & 2-\epsilon & \epsilon-6 \\ -11+\epsilon & -11+\epsilon & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Schätzen Sie die Eigenwerte der gestörten Matrix $A(\epsilon)$ mittels des Satzes von Bauer-Fike in Abhängigkeit von der Störung $\epsilon \in \mathbb{R}$ ab. Verwenden Sie hierfür die 1-Norm. Es existiert hierfür eine sinnvolle Zerlegung $A(\epsilon) = M + S(\epsilon)$, für die die Matrix $D = T^{-1}MT$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist. Nutzen Sie diese Zerlegung.

(b) Benutzen Sie die in Aufgabe (a) gewonnene Abschätzung

$$\sigma(A(\epsilon)) \subseteq \{x : |x+4| \leq 6|\epsilon|\} \cup \{x : |x-8| \leq 6|\epsilon|\} \cup \{x : |x-18| \leq 6|\epsilon|\}$$

um ϵ so zu bestimmen, dass 0 kein Eigenwert der Matrix A sein kann.

(c) Ist die Matrix $A(\epsilon)$ für $\epsilon = \frac{3}{5}$ invertierbar?

4+2+1 = 7 Punkte

Aufgabe 10.

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hat die Matrix A nur reelle Eigenwerte? Begründen Sie ihre Antwort. Leiten Sie ferner mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin eine obere Schranke für den größten Eigenwert und eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert dieser Matrix her.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und

$$B = \begin{pmatrix} n(n+1) & 1 & 2 & \dots & n \\ n & n(n+1) & 1 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & n(n+1) & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n & n(n+1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix B regulär ist.

3+2 = 5 Punkte

Aufgabe 11.

Berechnen Sie einen Schätzwert des größten Eigenwertes der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

indem Sie 2 Schritte der Potenzmethode ("*Power iteration method*") mit dem Anfangsvektor $x^{(0)} = [1,1,1]^T$ durchführen.

1+1= 2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: