Prof. Dr. Benjamin Stamm
Vertr.-Prof. Dr. Christian Rieger

**Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!**

# Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2019
# Klausur | 23.08.2019

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

**Hinweise:**

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 30.08.2019 von 14:30–15:30 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, SchinkelstraSSe 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

**Matrikelnummer:** ___ ___ ___ ___ ___ ___

**Name, Vorname:** ______________________________

**Unterschrift:** ______________________________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 6 | 6 | 4 | 6 | 7 | 7 | 5 | 9 | 50 |
| Ihre Punkte | | | | | | | | | |

| Klausur | | Bonus | | Gesamt |
|---|---|---|---|---|
| | + | | = | |

Note:

**Aufgabe 1.**

(a) Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung, um zu zeigen, dass die Funktion

$$f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

in der Menge $L^1((1, \infty))$ enthalten ist.

(b) Geben Sie eine Funktion $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$ an, für die gilt

$$g \in L^1([1, 2]), \text{ aber } g \notin L^2([1, 2]).$$

(c) Gibt es eine Funktion $h : [1, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$h \in L^2([1, 2]), \text{ aber } h \notin L^1([1, 2])?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

**2+2+2 Punkte**

**Aufgabe 2.**
Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ \cos(y + z^2) \\ 2z\cos(y + z^2) \end{pmatrix}$$

und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin^2 t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie ein Potential von $f$.

(c) Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_\gamma f \cdot ds$$

$(i)$ direkt;

$(ii)$ mit Hilfe des Potentials aus $(b)$.

**2+2+2 Punkte**

**Aufgabe 3.**
Gegeben sei die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$,

$$F = \left\{ \left(e^{\alpha}, \alpha \cos(\beta), \alpha \sin(\beta)\right) \ : \ \alpha \in [0,1],\ \beta \in [0, 2\pi[ \right\},$$

und das Vektorfeld $f \ : \ F \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \left(x\sqrt{y^2+z^2}, y, z\right).$$

a) Berechnen Sie die Oberflächennormale $\nu$ zu $F$. Die Oberflächennormale $\nu$ sei mit einer positiven ersten Komponente definiert.

b) Bestimmen Sie $\int_F f \cdot \nu \, d\sigma$.

**2+2 Punkte**

**Aufgabe 4.**

Gesucht ist eine Funktion $y \in D = \{w \in C^2([0,1]) : w(0) = w(1) = \frac{\pi}{4}\}$ die das Funktional

$$F : D \to \mathbb{R}, \; F(y) = \int_0^1 \Big( \big(y'(t)\big)^2 + \cos(y(t)) \Big) dt$$

minimiert.

a) Bestimmen Sie die erste Variation $\partial F(y; v)$ von $F$ in Richtung $v$. Dabei sei $v \in D_0 = \{w \in C^2([0,1]) : w(0) = w(1) = 0\}$.

b) Welcher Differentialgleichung müssen die Extremalen des Funktionals $F$ genügen?

c) Ist $D$ konvex? Kann eine Aussage über die Konvexität des Funktionals $F$ getroffen werden?

**2+2+2 Punkte**

Name: Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 5.**

Betrachten Sie das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$ mit $x(0) = x_0$. Die Zeitdiskretisierung sei durch $t_j = jh$ gegeben. Gegeben sei das Einschrittverfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t,x) \\ k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t+h, x+hk_3) \\ \Psi(t,x,h) &= \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \end{aligned}$$

a) Geben Sie das für ein allgemeines Butcher-Tableau das dazugehörige Einschrittverfahren an und für das obige Verfahren das dazugehörige Butcher-Tableau.

b) Zeigen Sie, dass das Verfahren mindestens Konsistenzordnung 2 hat.

c) Welche Konsistenzordnung kann es maximal haben?

d) Betrachten Sie die Gleichung mit $f(t,x) = \lambda x$ und berechnen Sie die Verstärkungsfunktion $R$, d.h. $x_{j+1} = R(h\lambda)x_j$.

**2+2+1+2 Punkte**

**Aufgabe 6.**

Betrachten Sie das Anfangswertproblem $x' = f(t, x)$ mit $x(0) = x_0$ und $x(h) = x_1$. Die Zeitdiskretisierung sei durch $t_j = jh$ gegeben.

a) Definieren Sie ein allgemeines lineares $m$-Schrittverfahren.

b) Betrachten Sie konkret

$$x_{j+2} = -4x_{j+1} + 5x_j + h\left(4f(t_j + h, x_{j+1}) + 2f(t_j, x_j)\right)$$

Was ist das charakteristische Polynom dieses Verfahrens? Ist das Verfahren nullstabil?

c) Geben Sie die Konsistenzordnungsbedingungen für lineare $m$-schrittverfahren an. Welche Konsistenzordnung hat das obige Verfahren?

d) Betrachten Sie den Fall $f \equiv 0$ und $x_0 = 1, x_1 = 1+\delta$. Wie sieht $x_j$ aus für $j = 2, 3, \ldots$? (Geben Sie eine allgemeine Form an.)

**1+2+2+2 Punkte**

**Aufgabe 7.**

Betrachten Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $A$ in der Vereinigung der Gerschgorin-Kreise

$$K_j = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;:\; |\lambda - a_{j,j}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} |a_{j,k}| \right\}, \quad 1 \leq j \leq n$$

liegen.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ strikt diagonal-dominant ist.

c) Folgern Sie daraus, dass $A_3$ für $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ regulär ist.

**3+1+1 Punkte**

Name: Matrikel-Nr.:

**Aufgabe 8.**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x.$$

a) Hat $f$ ein globales Minimum?

b) Ist $f$ konvex?

c) Ist das Minimum (sofern es existiert) eindeutig?

d) Betrachten Sie die Liniensuche $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$, wobei Sie die Suchrichtung $d^{(k)}$ mittels der Methode des steilsten Abstieges bestimmen. Geben Sie $d^{(k)}$ an.

e) Bestimmen Sie das optimale (größter Abstieg) $\alpha_k$.

f) Wie sehen die Wolfe-Bedingungen für die zulässige Schrittweite für dieses Verfahren ($f$, $d^{(k)}$) aus? Vereinfachen Sie so weit wie möeglich ($d^{(k)}$ ist zu wählen wie oben)

**1+1+1+1+2+3 Punkte**