**Aufgabe 1.**

Gegeben sei das Funktional $F : D \to \mathbb{R}$ mit

$$F(u) = \int_0^1 \left((u'(x))^2 + 2(u(x))^2\right) dx$$

und $D := \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u'(0) = 0\}$.

(a) Sei $v \in D$. Berechnen Sie die erste Variation von $F$ im Punkt $u$ in Richtung $v$.

(b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der die Extremalen von $F$ genügen.

(c) Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung mit den durch $D$ vorgegebenen Randbedingungen an.

(d) Ist die Menge

$$G := \left\{u \in C^0([a,b]) : \int_a^b u(x)dx = 0\right\}$$

konvex?

**2+1+1+2 = 6 Punkte**

**Aufgabe 2.**

Gegeben sei die Funktion $f : [e, \infty) \to \mathbb{R}^+$ mit

$$f(x) = -\frac{2}{x(\ln(x))^3},$$

wobei $e$ die Eulersche Zahl ist. Zeigen Sie, dass $f \in L^p([e, \infty))$ genau dann gilt, wenn $p \geq 1$ ist. $p \geq 1$ ist.

Hinweis:
Behandeln Sie die Fälle $p < 1$, $p = 1$ und $p > 1$ getrennt. Benutzen Sie

**im Fall** $p > 1$**:** $\ln(x) \geq 1$ für $x \geq e$,

**im Fall** $p = 1$**:** die Ableitung $\frac{d}{dx} \frac{1}{\ln^2(x)}$, und

**im Fall** $p < 1$**:** für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $C > 0$ sodass $\ln(x) \leq Cx^\varepsilon$ für alle $x \geq e$.

**7 Punkte**

**Aufgabe 3.**

Wir betrachten die auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Vektorfeldfamilie

$$\vec{F}_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} y\sin(x) - \alpha x\cos(y) \\ \alpha\frac{x^2}{2}\sin(y) - \cos(x) + \cos(y) \end{pmatrix}$$

mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass zum Vektorfeld $\vec{F}_\alpha$ ein Potential $G_\alpha$ existiert.

b) Berechnen Sie ein Potential $G$ des Vektorfelds $\vec{F}_1$.

c) Sei $\vec{\gamma}$ die Kurve

$$\vec{\gamma}(t) := (-t, t^2)^T, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_0^{\pi/2} \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{\gamma}.$$

**2+1+1 = 4 Punkte**

**Aufgabe 4.**

Sei $P$ die Fläche

$$P := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{\pi}{2},\ \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = x_3 \right\}.$$

(a) Finden Sie eine Parametrisierung von $P$.

(b) Geben Sie ein einfaches (also eindimensionales) Integral für den Flächeninhalt $|P|$ an. (Sie müssen das Integral nicht auswerten.)

(c) Sei

$$M := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{\pi}{2},\ 0 < x_3 < \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \right\}.$$

Wenden Sie den Satz von Gauß an, um

$$\int_M \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\, dx$$

zu berechnen.

*Hinweise*:

(i) Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) := (0, 0, x_3 \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right))^T$.

(ii) $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$.

**1+2+2 = 5 Punkte**

**Aufgabe 5.**

Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ wird mithilfe des verbesserten Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h$

$$y^{j+1} = y^j + h\, f\left(t_j + \frac{h}{2}, y^j + \frac{h}{2} f(t_j, y^j)\right)$$

approximiert.

a) Zeigen Sie, dass die Konsistenzordnung des verbesserten Euler-Verfahrens mindestens $2$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die gewöhnliche Differentialgleichung $y'(t) = t$ exakt integriert wird.

**4+1,5 = 5,5 Punkte**

**Aufgabe 6.**

Zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

betrachten wir das Verfahren von Heun mit Schrittweite $h$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k))].$$

(a) Schreiben Sie das Verfahren als Runge-Kutta Verfahren mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}.$$

Ist das Verfahren explizit oder implizit?

(b) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $g(z)$.

(c) Welche Bedingungen muss diese Methode erfüllen, um A-stabil zu sein? Ist das Verfahren A-stabil?

**1,5+1,5+1 = 4 Punkte**

**Aufgabe 7.**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Eigenwerte von $A$ sind $\lambda_1 = 9$, mit dazugehörigem Eigenvektor $(0, 1, 0)^T$, $\lambda_2 = 36$ mit dazugehörigem Eigenvektor $(1, 0, 1)^T$ und $\lambda_3 = -4$ mit dazugehörigem Eigenvektor $(1, 0, -1)^T$.

a) Führen Sie einen Schritt der Vektoriteration mit dem Startvektor $\mathbf{x}_0$ in Richtung $(1, 1, 1)^T$ aus. Geben Sie die Näherungswerte für den Eigenwert und Eigenvektor nach dem ersten Iterationsschritt an. Gegen welchen Eigenwert konvergiert die Methode?

b) Führen Sie einen Schritt der inversen Vektoriteration mit dem Startvektor $\mathbf{x}_0$ in Richtung $(1, 1, 1)^T$ und für den geschätzten Eigenwert $\lambda = 8$ aus. Geben Sie die Näherungswerte für den Eigenwert und Eigenvektor nach dem ersten Iterationsschritt an. Gegen welchen Eigenwert konvergiert die Methode?

**3+4 = 7 Punkte**

**Aufgabe 8.**

Betrachten Sie die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ und das Abstiegsverfahren $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$ mit Abstiegsrichtung $d^{(k)}$ und Schrittweite $\alpha_k$.

a) Geben Sie die Abstiegsrichtung für das Verfahren des steilsten Abstiegs und für das Newton-Verfahren für die Funktion $\varphi$ an.

b) Welche Bedingungen an $A$ müssen im Fall des Newton-Verfahrens gelten, damit $d^{(k)}$ tatsächlich eine Abstiegsrichtung ist?

c) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = (-3, 6)^T$ und $c = 0$. Schätzen Sie mit dem Satz von Gerschgorin die Eigenwerte von $A$ ab und zeigen Sie, dass die Bedingungen aus (b) erfüllt sind.

d) Mit den konkreten Angaben aus (c) ergibt sich das Minimum $(x^\star, y^\star) = (4, -2)$. Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = (0, 0)^T$ jeweils einen Schritt mit dem Verfahren des steilsten Abstiegs und dem Newton-Verfahren durch. Halbieren Sie die Schrittweite $\alpha_0 = 1$ bis $\varphi(x^{(1)}) < \varphi(x^{(0)})$ gilt.

e) Was fällt Ihnen am Ergebnis des Newton-Schrittes auf? Haben Sie eine Erklärung dafür?

**1+1,5+1+1,5+0,5 = 5,5 Punkte**

Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle

# Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2018
# Klausur am 28.08.2018 | Beanstandungen der Klausurkorrektur

| Name, Vorname | Matrikelnummer |
|---|---|
| | |

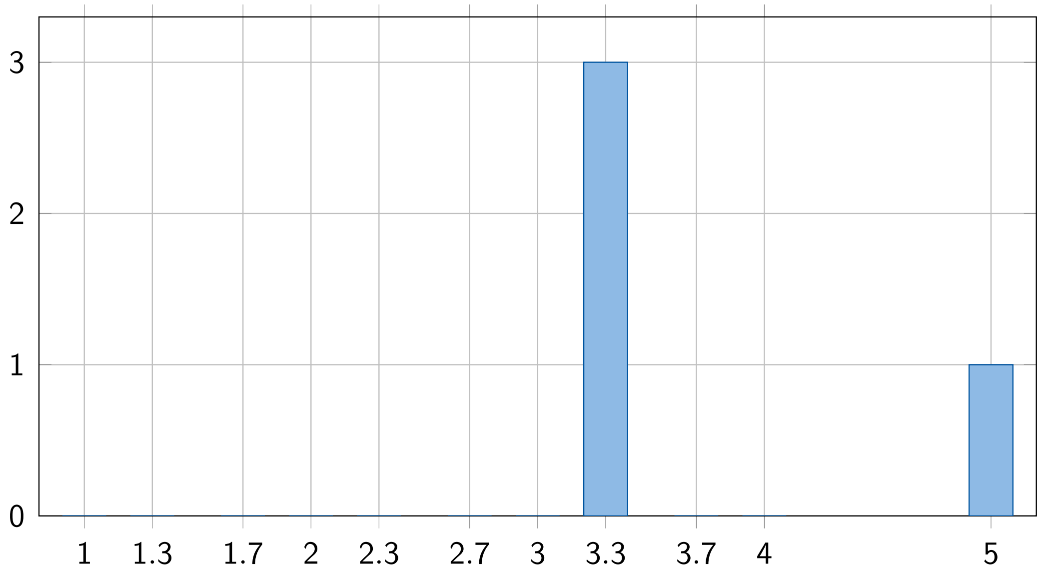
| Aufgabe | Erklärung der Beanstandungen |
|---|---|
| | |

Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle

# Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2018
# Klausur am 28.08.2018 | Notenskala und Statistik

| Note | Punkte | Statistik |
|---|---|---|
| 1.0 | 42.5 – 44 | 0 |
| 1.3 | 40 – 42 | 0 |
| 1.7 | 37.5 – 39.5 | 0 |
| 2.0 | 35 – 37 | 0 |
| 2.3 | 32.5 – 34.5 | 0 |
| 2.7 | 30 – 32 | 0 |
| 3.0 | 27.5 – 29.5 | 0 |
| 3.3 | 25 – 27 | 3 |
| 3.7 | 22.5 – 24.5 | 0 |
| 4.0 | 20 – 22 | 0 |
| 5.0 | 0 – 19.5 | 1 |

Notenskala




Notenstatistik