Prof. Dr. Martin Frank
Prof. Dr. Martin Grepl

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2017
Klausur | 01.09.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 08.09.2017 von 11:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	5,5	6	4	4,5	5	6	5	4	40
Ihre Punkte									

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]   Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gesucht ist eine Funktion $u \in D = \{w \in C^2([0,1]) : w(0) = w(1) = w'(0) = w'(1) = 0\}$, die das Funktional

$$J : D \to \mathbb{R}\,,\; J(u) = \int_0^1 \Big(\big(u''(t)\big)^2 + u'(t) \Big) dt + \lambda \int_0^1 (u(t))^2 dt$$

minimiert. Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein fester Parameter.

a) Bestimmen Sie die erste Variation $\partial J(u; v)$ von J in Richtung v, wobei $v \in D$.

b) Welcher Differentialgleichung müssen die Extremalen des Funktionals J genügen? Schreiben Sie die Differentialgleichung explizit für das gegebene Problem auf.

c) Ist D konvex? Für welche λ ist J konvex?

2+1,5+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz \\ 3y^2 \\ x^2+3 \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Wege

- Weg 1 (Γ_1): Kreis von $(1,0,0)$ über $(0,1,0)$ nach $(-1,0,0)$,
- Weg 2 (Γ_2): Streckenzug von $(1,0,0)$ über $(0,0,1)$ nach $(-1,0,0)$.

(a) Bestimmen Sie die Arbeitsintegrale

$$\int_{\Gamma_1} f \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_2} f \cdot dx$$

direkt mittels der Definition.

(b) Besitzt f ein Potential? Falls ja, geben Sie es an.

4+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

Sei Ω ein Gebiet, sowie $f \in C^0(\Omega), g \in C^0(\partial\Omega)$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ eine Funktion, die die partielle Differentialgleichung

$$-\text{div}(\text{grad} u) = f \quad \text{in } \Omega \tag{1a}$$
$$n \cdot \nabla u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1b}$$

erfüllt. Dabei sei n der nach außen zeigende Normalenvektor.

(a) Zeigen Sie, dass für die Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung (1) die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} g ds = -\int_{\Omega} f dx$$

erfüllt sein muss.

(b) Benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (a) um zu entscheiden ob für

$$g(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$$
$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\Omega = \bar{B}_2(0) := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}$$

eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ von (1) existiert.

1,5+2,5 Punkte

Aufgabe 4.

(a) Sei $\Omega =]0,1[$. Geben Sie eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an mit

$$f \in L^3(\Omega) \text{ , aber } f \notin L^4(\Omega).$$

(b) Geben Sie für die Funktionen f und g alle p mit $1 \le p \le \infty$ an, sodass $f, g \in L^p(\Omega)$.

- $\Omega =]1, \infty[$, $f(x) = \frac{\sin(x)+2}{\sqrt{x}}$,
- $\Omega =]0, \infty[$, $g(x) = xe^{-x}$.

1,5+3 Punkte

Aufgabe 5.

Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)), \quad t \geq 0, \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Dieses soll mit Hilfe des folgenden Einschrittverfahren

$$y_{j+1} = y_j + h\left\{(1-\alpha)\, f(t_j, y_j) + \alpha f\Big(t_j + \frac{h}{2\alpha}, y_j + \frac{h}{2\alpha} f(t_j, y_j)\Big)\right\}$$

gelöst werden, wobei $\alpha \neq 0$ ein Parameter und h die Zeitschrittweite ist.

(a) Geben Sie das Butcher-Tableau für dieses Verfahren an. Ist das Verfahren explizit oder implizit? Ist das Verfahren konsistent?

(b) Zeigen Sie mittels der Taylor-Entwicklung, dass der Konsistenzfehler gegeben ist durch

$$\tau_{j+1} = \frac{h^2}{8\alpha}\left\{\left(\frac{4}{3}\alpha - 1\right) y'''(t_j) + y''(t_j)\frac{\partial f}{\partial y}\,(t_j, y(t_j))\right\} + \mathcal{O}(h^3)$$

Sie können annehmen, dass die Funktion f hinreichend glatt ist.

(c) Das Verfahren wird angewandt auf das skalare AWP $\dot{y}(t) = -y(t)$, $y(0) = 1$. Zeigen Sie, dass die Konsistenzordnung 2 unabhängig von α ist.

1+3,5+0,5 Punkte

Aufgabe 6.

Ein RLC-Reihenschwingkreis wird beschrieben durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} L \cdot \frac{di}{dt} &= -u_c - R \cdot i \\ C \cdot \frac{du_c}{dt} &= i, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei i der Spulenstrom, u_c die Kondensatorspannung, L die Induktivität der Spule, C die Kapazität des Kondensators und R der ohmsche Widerstand ist. Die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ sind gegeben durch $i(0) = 0$ und $u_c(0) = u_{c,0}$.

(a) Zeigen Sie, dass sich das System (1) in der Form eines harmonischen Oszillators, d.h. als skalares Anfangswertproblem zweiter Ordnung gegeben durch

$$\begin{aligned} y''(t) + 2\,\zeta\, y'(t) + \omega_n^2\, y(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_f \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = v_0. \end{aligned}$$

schreiben lässt. Geben Sie $y(t)$ und dessen Anfangsbedingungen, sowie den Dämpfungsgrad ζ und die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_n in Abhängigkeit von i, u_c, L, R und C an.

(b) Wir betrachten nun wieder das System (1), das sich schreiben lässt als

$$w'(t) = Aw(t), \quad w(0) = w_0, \quad 0 \leq t, \leq t_f \tag{3}$$

mit $w(t) = (i(t)\ u_c(t))^T \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie A explizit an und bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A. Was lässt sich über die Stabilität des RLC-Schwingkreises sagen (*Hinweis: aus physikalischen Gründen sind R, L und C strikt positiv*)? Was lässt sich über die Stabilität sagen, falls $R = 0$?

(c) Sei nun $L = C = R = 1$ und $u_{c,0} = 2$. Bestimmen Sie eine Näherung für $w(0.5)$, indem Sie zwei Schritte des impliziten Euler-Verfahrens durchführen.

(d) Zur näherungsweisen Lösung linearer Differentialgleichungssysteme der Form (2) stehen Ihnen implizite oder explizite Verfahren zur Verfügung. Geben Sie Vor- und Nachteile der beiden Verfahren hinsichtlich Stabilität und Aufwand an.

1+2,5+2+0,5 Punkte

Aufgabe 7.
Wir verwenden zum Lösen des skalaren Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \lambda\, y(t), \quad t \geq 0, \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

die θ-Methode, d.h.

$$y_{j+1} = y_j + h\big((1-\theta)f(t_j, y_j) + \theta f(t_{j+1}, y_{j+1})\big)$$

mit $\theta \in [0, 1]$.

(a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion

(b) Geben Sie für $\theta = 0,\ 0.5$ und 1 jeweils das Stabilitätsintervall an und skizieren Sie die Stabilitätsgebiete.

(c) Ist das Verfahren für $\theta = 0.5$ A-stabil? Ist es L-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

0,5+4+0,5 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & -1.5 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gershgorin eine möglichst kleine Menge an, in der die Eigenwerte von A enthalten sind.

(b) Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens zur Eigenwertbestimmung mit der Matrix A aus.

1+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: