Dr. Graham Alldredge
Prof. Mike Espig
Jonas Bünger, M.Sc.

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2016
Klausur | 26.08.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 07.09.2016 von 11:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt" an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
Punkte	3.5	5.5	5	6	5,5	4	2,5	5	3	40
Ihre Punkte										

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Seien

$$M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 3x_1,\, 2x_2 > x_1\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < 2x_1 + x_2\}$$

und $f : M \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) := |2x_1 + x_2|^{-3/8} |2x_2 - x_1|^{-1/8}$$

Für welche $p \in [1, \infty)$ gilt $f \in L^p(M)$? Berechnen Sie die p-Norm $\|f\|_p$ auf M für alle $p \in [1, \infty)$ für die $f \in L^p(M)$ gilt.

Hinweis: Koordinatentransformation.

3,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

Sei Γ die Kurve mit der Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.
Hinweis:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right)$$

b) Welches dieser Vektorfelder

$$F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 2x_1^3 x_2^2 \exp(x_1^4 x_2^2) \\ x_1^4 x_2 \exp(x_1^4 x_2^2) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad G(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

besitzt ein Potential? Berechnen Sie dieses Potential.

c) Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $\int_\Gamma F \cdot dx$ beziehungsweise $\int_\Gamma G \cdot dx$. Sie dürfen das Potential benutzen.

2+2+1,5 Punkte

Aufgabe 3.

Sei P die Fläche

$$P := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) + 1 = x_3,\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \pi \right\}.$$

(a) Finden Sie eine Parametrisierung für P.

(b) Geben Sie ein einfaches (also eindimensionales) Integral für den Flächeninhalt $|P|$ an. (Dieses Integral müssen Sie aber nicht auswerten.)

(c) Sei

$$M := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < \cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) + 1,\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \pi \right\}.$$

Wenden Sie den Satz von Gauß an, um

$$\int_M \cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\, dx$$

zu berechnen.

Hinweise:

(i) Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) := (0, 0, x_3 \cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right))^T$.

(ii) $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1)$.

1+2+2 Punkte

Aufgabe 4.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Bereich mit stückweise glattem und kompaktem Rand mit äußerer Normale $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \ldots, \nu_n(x))^T$.

a) Sei $F : C^2(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ das Funktional

$$u \mapsto F(u) := \int_\Omega u^2 + \|\nabla u\|^2 \, dx.$$

Berechnen Sie die erste Variation in Richtung $v \in C^2(\overline{\Omega})$.

b) Ist F konvex? Ist es strikt konvex? Begründen Sie Ihre Antworten. Was können Sie zu Extremstellen von F aussagen?

c) Nun begrenzen wir F auf

$$M := \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}) : u\big|_{\partial\Omega} = 1 \right\}.$$

Welche partielle Differentialgleichung erfüllt eine Minimalstelle von $F : \; M \; \to \; \mathbb{R}$?

1,5+2+2,5 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei ein Einschrittverfahren mit

$$\varPhi_f(t,y,h) = a\,f(t,y) + \frac{1}{4} f\big(t + b\,h, y + c\,h\,f(t,y)\big)$$

a) Geben Sie das Runge-Kutta Tableau für dieses Verfahren an. Ist das Verfahren explizit oder implizit?

b) Für welche Werte von (a,b,c) ist die Konsistenzordnung des Verfahrens mindestens 2?

c) Existieren für Parameter (a,b,c) Werte, so dass das Schema mit der speziellen Flussfunktion $f(t,y) = t^2$ von dritter Ordnung ist?

1+2,5+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 6.

Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ frei wählbare Parameter und folgendes Butcher-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \alpha & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \beta & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \gamma \end{array}$$

a) Geben Sie Parameter $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ an, sodass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren invariant gegenüber Autonomisierung und konsistent mit der Ordnung 1 ist. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

b) Hat das Runge-Kutta-Verfahren mit den Parametern $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ (von Aufgabenteil a)) sogar Konsistenzordnung 2?

Hinweis:

- Die Sätze aus der Vorlesung dürfen direkt angewendet werden.

3+1 Punkte

Aufgabe 7.

Sei die Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben als:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 15 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte in α schneiden sich die im Theorem von Bauer-Fike definierten Scheiben nicht, wenn die Einheitsmatrix für T und die ∞-Matrixnorm verwendet werden?

2,5 Punkte

Aufgabe 8.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 5/2 & 7/2 \\ -1/\sqrt{2} & 7/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie mithilfe des Satzes von Gerschgorin Abschätzungen für die Eigenwerte von A an.

(b) Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens zur Eigenwertberechnung für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

durch.

2+3 Punkte

Aufgabe 9.

Sei A eine diagonalisierbare Matrix.

a) Zeigen Sie, dass A Nullstelle des eigenen charakteristischen Polynoms p_A ist, also $p_A(A) = 0$ gilt.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{\times n}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_1\lambda + a_0$. Zeigen Sie, dass $a_0 = (-1)^n \det(A)$.

2+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.: