Prof. Dr. Martin Frank
Prof. Dr. Benjamin Berkels

Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2015
Klausur am 21.08.2015 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Vorgelegt sei das folgende Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

(a) Führen Sie für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= t^2 \cdot x(t) \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

und die Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{2}$ einen Schritt des durch das Butcher-Tableau gegebenen Runge-Kutte-Verfahrens aus.

(b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens aus (a) mittels Taylorentwicklung.

(c) Konvergiert das Verfahren aus (a) für $\Delta t \to 0$ gegen die exakte Lösung des Anfangswertproblems?

2+1,5+1 Punkte

Aufgabe 2.

a) Vorgelegt sei das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Ist das zugehörige RK-Verfahren invariant gegenüber Autonomisierung?

b) Zeigen Sie, dass das Verfahren mindestens Ordnung 2 besitzt.

2+3,5 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gershgorin eine möglichst kleine Menge an, in der die Eigenwerte von A enthalten sind.

(b) Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens zur Eigenwertbestimmung mit der Matrix A aus.

1,5+3,5 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Funktion:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) &= 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - y + 1 \end{aligned}$$

sowie der Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(a) Besitzt f ein eindeutiges Minimum $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$?

(b) Bestimmen Sie im Punkt (x_0, y_0) eine Abstiegsrichtung für f, d.h. einen Vektor $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta) \leq f(x_0, y_0)$$

für hinreichend kleines $t > 0$.

(c) Minimieren Sie f entlang der in (b) bestimmten Abstiegsrichtung, d.h. bestimmen Sie $t^* \geq 0$, so dass

$$f(x_0 + t^*\xi, y_0 + t^*\eta) < f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta)$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

(d) Bestimmen Sie aus (c) eine neue Approximation für die Minimalstelle von f.

2+0,5+2+0,5 Punkte

Aufgabe 5.

Sei $D = \left\{ w \in C^2([-1,1]) : w(x) > \frac{1}{2e} \right\}$. Wir betrachten das Funktional

$$F(y) = \int_{-1}^{1} y(x) \ln(y(x))\, \mathrm{d}x.$$

a) Bestimmen Sie die erste Variation $\delta F(y; v)$ von F im Punkt $y \in D$ in Richtung $v \in C^2([-1,1])$, wobei $y + tv \in D$ für alle hinreichend kleinen t.

b) Welcher gewöhnlichen Differentialgleichung müssen die Extremstellen von F genügen? Bestimmen Sie einen Kandidatien für ein Extremum.

c) Ist die zulässige Menge D konvex? Ist das Funktional F konvex? Was können Sie über globale Extrema des Funktionals F aussagen?

1,5+2+2,5 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben seien die Funktionen $f, g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$, wobei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x^{4/3}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/3}} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}.$$

Bekantlich ist g stetig.

a) Ist g Lebesgue-messbar? Ist h Lebesgue-messbar?

b) Zeigen Sie
   a) $g \in L^p([0,1])$ für alle $p \in \mathbb{R}$ mit $1 < p < \infty$.
   b) $h \in L^2([0,1])$.

c) Zeigen Sie, dass $f \in L^2([0,1])$. Sie dürfen die Ergebnisse aus a) und b) ohne Beweis benutzen.

1+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y^2 \\ 4xy - 3z^3 \\ -9yz^2 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Berechnen Sie $\mathrm{rot} f$. Was können Sie aus dem Ergebnis für f folgern?

b) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot dx$ für die Wege

$$\gamma_1 \ : \ [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto \big(3t\cos(t), 3t\sin(t), t\big)^T,$$
$$\gamma_2 \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto \begin{cases} \big(2t, 0, 0\big)^T, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \big(1, 2(t-\frac{1}{2}), 0\big)^T, & \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

c) Berechnen Sie die Bogenlänge von γ_2.

2+2+1 Punkte

Aufgabe 8.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(1+x_2^2) + \frac{1}{2}x_1^2 \\ \cos x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Ferner seien $c \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto 4 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2$ und $M := \{x : c(x) \ge 0\}$, d.h. M ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(1,2)$ und Radius 2.

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral (zweiter Art) von f über den Rand von M, d.h.

$$\int_{\partial M} < f, \nu > dA.$$

b) Berechnen Sie den Minimierer von $div f$ auf M, d.h. den Minimierer unter der Nebenbedingung $c(x) \ge 0$.

2,5+2,5 Punkte