Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Arnold Reusken

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen III (CES) | SS 2014
Klausur | 22.08.2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 4.9.2014 von 14:00–15:30 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6,5	5	6	6	7	6,5	6	7	50
Ihre Punkte									

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Gesucht sind die Extremalen $y \in C^2([0,1])$ des Funktionals

$$F(y) = \int_0^1 (y'(x)^2 + 3y'(x)y(x) + y(x)^2)\,dx.$$

a) Bestimmen Sie die erste Variation von F in Richtung h mit

$$h \in D = \{w \in C^2([0,1]) : w(0) = w(1) = 0\}.$$

b) Berechnen Sie die Extremale y für die Randwerte $y(0) = y(1) = 1$.

c) Formulieren Sie die natürlichen Randbedingungen für obige Variationsaufgabe. Bestimmen Sie die Extremale y des Funktionals F mit natürlichen Randbedingungen.

d) Sind die Mengen

$$D_1 = \{w \in C^2([0,1]) : w(0) = w(1) = 1\}$$
$$D_2 = \{w \in C^2([0,1]) : \int_0^1 w\,dx = 1, w > 0, w'(1) = 1\}$$

konvex? Begründen Sie ihre Antwort.

1,5+2+2+1 Punkte

Aufgabe 2.

Wir betrachten die auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Vektorfeldfamilie

$$\vec{F}_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha y \sin(x) - x \cos(y) \\ \alpha \frac{x^2}{2} \sin(y) - \cos(x) + \alpha \cos(y) \end{pmatrix}$$

mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass zum Vektorfeld $\vec{F}_1$ ein Potential G existiert.

b) Berechnen sie ein Potential G des Vektorfelds $\vec{F}_1$.

c) Sei $\vec{\gamma}$ die Kurve

$$\vec{\gamma}(t) := (-t, t^2)^T, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_0^{\pi/2} \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{\gamma}$$

für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$.

2+1+2 Punkte

Aufgabe 3.

Sei $1 < p_k < \infty$ für $k = 1, \ldots, N$, $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{p_k} = 1$ und $X \subset \mathbb{R}^d$. Sei $f_k \in L^{p_k}(X)$, $k = 1, \ldots, N$ und $f_k \in L^1(X)$, $k = 1, \ldots, N$.

a) Zeigen Sie, dass für $p_1' = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}$, $q_2 = \frac{p_2}{p_1'}$ und $q_3 = \frac{p_3}{p_1'}$ gilt:

$$\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 1$$

In der gedruckten Form der Klausur SS 2014 fand sich der Fehler, dass nach $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$ gefragt wurde

b) Zeigen Sie, dass für $N = 3$ gilt:

$$\left| \int_X \prod_{k=1}^{N} f_k d\mu \right| \leq \prod_{k=1}^{N} ||f_k||_{L^{p_k}(X)} \tag{1}$$

c) Verwenden Sie Aufgabe b) um zu zeigen, dass Ungleichung (1) auch für $N = 4$ gilt.

Hinweise:

- Verwenden Sie die Definition der $L^p(X)$-Norm für $1 \leq p < \infty$:

$$||g||_{L^p(X)} = \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Wenden Sie sukzessive die bekannte Hölder-Ungleichung für $fg \in L^1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$||fg||_{L^1(X)} \leq ||f||_{L^p(X)} ||g||_{L^q(X)}$$

- Verwenden Sie, dass für $p \geq 1$ gilt: $|f|^p = |f^p|$

1+3+2 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xz^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

sowie der Einheitswürfel

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral (zweiter Art)

$$\int_{\partial V} \langle f, \nu \rangle \, d\sigma \ ,$$

wobei ∂V den Rand von V bezeichnet und ν das von V nach außen zeigende Einheitsnormalenfeld.

6 Punkte

Aufgabe 5.

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mittels Givens-Transformationen orthogonale Matrizen Q_i und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $Q_2 Q_1 A = R$ gilt.

b) Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 12 \\ 4 & 4 & 30 & -15 \\ 8 & -2 & -45 & 0 \\ 8 & -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

durch Householder-Spiegelungen auf eine ähnliche obere Hessenberg-Matrix.

c) Gegeben sei eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir betrachten nun das QR-Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten. Weshalb wird eine Transformation auf obere Hessenberg-Gestalt verwendet und wie hoch ist etwa der Aufwand pro QR Iteration? Wird der Aufwand geringer falls die vorliegende Matrix A symmetrisch ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

2,5+2,5+2 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben sei die Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Gershgorin-Kreisen, dass C invertierbar ist.

b) Führen Sie einen Schritt einer inversen Vektoriteration für den Shift $\mu = 4$ und den Startvektor $y^0 = (0, 1, 0)^T$ durch.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige Matrix. Das Spektrum von A (Menge aller Eigenwerte) wird mit $\sigma(A)$ bezeichnet. Sei $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige invertierbare Matrix und $B := T^{-1}AT$.

c) Zeigen Sie: $\sigma(A) = \sigma(A^T)$.

d) Zeigen Sie: $\sigma(A) = \sigma(B)$.

2+2,5+1+1 Punkte

Aufgabe 7.

Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$y''(t) + y'(t) = t\,y(t), \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

a) Transformieren Sie dieses Problem auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie eine Näherung für $y\left(\frac{1}{2}\right)$, indem Sie zwei Schritte mit dem expliziten Euler-Verfahren machen.

Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem erster Ordnung

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \quad t \in [0, T],$$
$$y(0) = y^0,$$

und allgemeine Einschrittverfahren $y^{j+1} = y^j + h\,\Phi_f\big(t_j, y^j, h\big)$ mit $h = \frac{T}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), $j = 0, \ldots, n-1$, zur numerischen Lösung dieses Problems.

c) Geben Sie eine genaue Beschreibung des lokalen Abbruchfehlers $\delta_{j,h} = y(t_{j+1}) - y_h\big(t_{j+1}; t_j, y(t_j)\big)$ bei solchen Einschrittverfahren. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem lokalen Fehler und dem maximalen globalen Fehler $\max_{j=0,\ldots,n} \left|y(t_j) - y^j\right|$.

1,5+2+2,5 Punkte

Aufgabe 8.

Sei A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= -Ay(t), \quad t \in [0, T], \\ y(0) &= y^0. \end{aligned}$$

a) Erklären Sie für welche Matrizen A dieses Anfangswertproblem steif ist. Erklären Sie weshalb für die Lösung solcher steifen Probleme *explizite* Einschrittverfahren nicht gut geeignet sind.

Wir betrachten die skalare Testgleichung

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t), \quad t \in [0, T], \\ y(0) &= y^0. \end{aligned}$$

b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda < 0$. Leiten Sie für die Trapezregel die zugehörige Stabilitätsfunktion her. Geben Sie das Stabilitätsintervall der Trapezregel an.

c) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Leiten Sie für das implizite Eulerverfahren die zugehörige Stabilitätsfunktion her. Ist das implizite Eulerverfahren A-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

2,5+2,5+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: