Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: | | | | | |

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Mathematische Grundlagen III (CES)

17.08.2012

Sie haben insgesamt **150 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.* Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Teilnehmer der Klausur können sich nur *vor Abgabe* der Klausur krankmelden. Dies muss schriftlich auf einem Formblatt bei der Klausuraufsicht angezeigt werden, die in diesem Punkt den Prüfungsausschuss vertritt; nur dann ist die Unverzüglichkeit gemäß Prüfungsordnung gewahrt. *entbindet nicht von der Pflicht, ein ärztliches Attest gemäß Prüfungsordnung fristgerecht einzureichen.* Der Termin der Klausureinsicht wird 14 Tage vorher bekannt gegeben.

Bitte verwenden Sie ein dokumentenechtes Schreibgerät, aber keinen Rotstift. Als Hilfsmittel sind *zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene A4 Blätter* zugelassen, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Weitere Hilfsmittel (Bücher, Formelsammlung, Formelblätter, Taschenrechner, Handys, Laptops etc.) sind **nicht** erlaubt. Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.

Ich versichere, die Klausur selbstständig und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln zu bearbeiten. Mir ist bekannt, dass die Klausur bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, als nicht bestanden gewertet wird. Weiterhin versichere ich, die Zulassungsvoraussetzungen erfüllt zu haben und ordnungsgemäß zur Klausur angemeldet zu sein.

NAME, VORNAME: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	7	7	5	6	7	7	5	6	
Ihre Punkte									

Note: | |

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Funktional $J : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}$ mit

$$J(\lambda, y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (y(x))^2 dx - \lambda \left(\int_{-1}^{1} y(x) dx - 1 \right)$$

und $D = C^0[-1, 1]$.

(a) Berechnen Sie die erste Variation von J bzgl. y. Dabei sei λ fest.

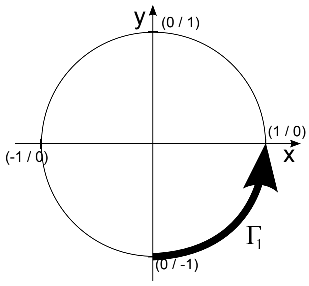
(b) Berechnen Sie die erste Variation von J bzgl. λ, d.h. die Ableitung von J bzgl. λ bei festem y.

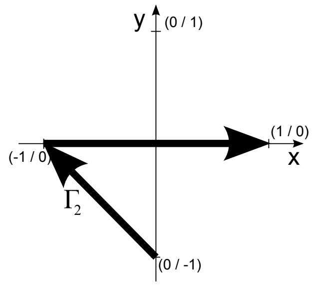
(c) Setzen Sie die erste Variation in beiden Fällen zu Null und bestimmen Sie aus dem entstehenden Gleichungssystem geeignete Kandidaten für y und λ.

(d) Interpretieren Sie die Aufgabe unter dem Gesichtspunkt der Optimierung unter Nebenbedingungen.

2 + 2 + 2 + 1 Punkte

Aufgabe 2.





Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2 e^{-x} \\ 2ye^{-x} \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Wege Γ_1 und Γ_2 von $(0,-1)$ nach $(1,0)$.

(a) Bestimmen Sie die Arbeitsintegrale

$$\int_{\Gamma_1} f \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_2} f \cdot dx$$

direkt mittels der Definition.

(b) Besitzt f ein Potential? Falls ja, geben Sie es an.

4 + 3 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Menge $\Omega =]0, \infty[$.

(a) Geben sie eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an mit

$$f \in \mathrm{L}^2(\Omega) \quad \text{aber} \quad f \notin \mathrm{L}^1(\Omega).$$

Begründen Sie ihre Wahl!

(b) Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung in der Form

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q = \|f\|_3 \, \|g\|_{\frac{3}{2}}$$

um das folgende Integral abzuschätzen:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x+2} \, e^{-\frac{2}{3}x} \, dx$$

3 + 2 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$ durch

$$F = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 4,\ (z-4)^2 = 9(x^2 + y^2)\}$$

Der Normalenvektor an F zeige in positive z-Richtung. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes

$$v(x, y, z) = (y, z, x)$$

längs des bzgl. F positiv orientierten Randes ∂F.

6 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei ein Einschrittverfahren mit

$$\phi(t,x,h) = \frac{3}{2} f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t,x)) + af(t + bh, x + chf(t,x))$$

a) Geben Sie das Runge-Kutta Tableau für dieses Verfahren an. Ist das Verfahren explizit oder implizit?

b) Für welche Werte von (a,b,c) ist die Konsistenzordnung des Verfahrens mindestens 1?

c) Für welche Werte von (a,b,c) ist die Konsistenzordnung des Verfahrens mindestens 2? Benutzen Sie die Definition und beschreiben Sie ausführlich die einzelnen Arbeitsschritte.

d) Nun sei $f(t,x) = f(x)$. Wie ändern sich die Bedingungen an (a,b,c) für das Verfahren von mindestens zweiter Ordnung?

2 + 1 + 3 + 1 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad .$$

a) In welchem Bereich liegen sämtliche Eigenwerte der Matrix A nach dem Kreissatz von Gerschgorin?

b) Verschärfen Sie die Abschätzung für die Eigenwerte wie folgt: Führen Sie geeignete Ähnlichkeitstransformationen $(D^{-1}AD)$ mit $D := diag(1, \alpha, \alpha^2)$ für $\alpha > 0$ durch, so dass Sie voneinander isolierte Gerschgorin-Kreise schlussfolgern können.

1.5+5.5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 9$, mit dazugehörigem Eigenvektor $(0,1,0)^T$, $\lambda_2 = 36$ mit dazugehörigem Eigenvektor $(1,0,1)^T$ und $\lambda_3 = -4$ mit dazugehörigem Eigenvektor $(1,0,-1)^T$.

a) Führen Sie einen Schritt der Vektoriteration mit dem Startvektor $\mathbf{x}_0$ in Richtung $(1,1,1)^T$ aus. Was sind die ersten Näherungswerte für den Eigenwert und den Eigenvektor. Zu welchem Eigenwert konvergiert die Methode?

b) Führen Sie einen Schritt der inversen Vektoriteration mit dem Startvektor $\mathbf{x}_0$ in Richtung $(1,1,1)^T$ und für den geschätzten Eigenwert $\lambda = 8$ aus. Was sind die ersten Näherungswerte für den Eigenwert. Zu welchem Eigenwert konvergiert die Methode?

2+3 Punkte

Aufgabe 8.

Betrachten Sie das Adams-Moulton Schema

$$x_{j+1} = x_j + h\left(\frac{5}{12}f_{j+1} + \frac{2}{3}f_j - \frac{1}{12}f_{j-1}\right)$$

und das Anfangswertproblem

$$\frac{dx}{dt}(t) = 2t - x(t),$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 1$.

a) Was ist die Ordnung des Adams-Moulton Schemas? Ist das Verfahren implizit oder explizit?

b) Weisen Sie nach, dass $x(t) = 3\exp(-t) + 2t - 2$ die exakte Lösung des Problems ist.

c) Sei h beliebig. Approximieren Sie $x(h)$ mit Hilfe des modifizierten Euler-Verfahrens, das durch das folgende Tableau gegeben ist:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

d) Zur Berechnung von $x(2h)$ mit dem oben angegebenen Adams-Moulton Schema werden $x(0)$ und $x(h)$ benötigt. Ist es ratsam $x(h)$ wie oben mit Hilfe des modifizierten Euler-Verfahrens zu approximieren? Warum (nicht)? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 + 1 + 2 + 1 Punkte