Aufgabe 1. Gesucht ist eine Funktion $y \in D = \left\{ w \in C^2([0,1]) \,:\, w(0) = w(1) = 1 \right\}$ die das Funktional

$$F \,:\, D \to \mathbb{R}\,,\ F(y) = \int_0^1 \left(\left(y'(t) \right)^2 + e^{y(t)} \right) dt$$

minimiert.

a) Bestimmen Sie die erste Variation $\partial F(y; v)$ von F in Richtung v, $v \in D_0 = \left\{ w \in C^2([0,1]) \,:\, w(0) = w(1) = 0 \right\}$.

b) Welcher Differentialgleichung müssen die Extremalen des Funktionals F genügen?

c) Ist D konvex? Ist das Funktional F konvex? Was können Sie über globale Extremalen des Funktionals F aussagen?

2 + 1 + 1.5 Punkte

Aufgabe 2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, d.h. $\lambda_n(\Omega) = \int_\Omega d\lambda_n < \infty$, und $1 < q \leq p < \infty$.

a) Zeigen Sie, dass wenn $f \in L^p(\Omega)$ ist, dann ist $|f|^q \in L^{\frac{p}{q}}(\Omega)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = 1$ für $x \in \Omega$ in $L^{\frac{1}{1-q/p}}(\Omega)$ ist.

c) Schließen Sie jetzt mithilfe der Ergebnisse aus a) und b), dass für $f \in L^p(\Omega)$

$$\|f\|_q \leq \lambda_n(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|f\|_p$$

ist, und folgern Sie dann $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$.
Hinweis:

$$\frac{1}{\frac{p}{q}} + \frac{1}{\frac{1}{1-q/p}} = 1;$$

1 + 1 + 1.5 Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei das Vektorfeld

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2xy - 2x\cos(z) \\ x^2 \\ x^2 \sin(z) \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot dx$, wobei

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t), t\big)^T, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

b) Weisen Sie nach, dass f ein Potential besitzt, und berechnen Sie dieses.

c) Berechnen Sie jetzt das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot dx$ mithilfe des in b) bestimmten Potentials.

1.5 + 1.5 + 1 Punkte

Aufgabe 4. Gegeben sei die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$,

$$F = \left\{ \left(e^{\alpha}, \alpha\cos(\beta), \alpha\sin(\beta)\right) \ : \ \alpha \in [0,1],\ \beta \in [0, 2\pi[\right\},$$

und das Vektorfeld $f \ : \ F \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \left(x\sqrt{y^2+z^2}, y, z\right).$$

a) Berechnen Sie die Oberflächennormale ν zu F. Die Oberflächennormale ν sei mit einer positiven ersten Komponente definiert.

b) Bestimmen Sie $\int_F f \cdot \nu \, d\sigma$.

1 + 1.5 Punkte

Aufgabe 5. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 5/2 & 7/2 \\ -1/\sqrt{2} & 7/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie mithilfe des Satzes von Gerschgorin Abschätzungen für die Eigenwerte von A an.

(b) Transformieren Sie A (z. B. mithilfe einer Givens-Rotation) auf Tridiagonalform.

(c) Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens zur Eigenwertberechnung für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

durch.

1.5 + 1 + 1.5 Punkte

Aufgabe 6. Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ wird mithilfe des modifizierten Euler-Verfahrens mit Schrittweite h

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right)$$

approximiert. Zeigen Sie, dass die Konsistenzordnung des modifizierten Euler-Verfahrens mindestens 2 ist.

3.5 Punkte

Aufgabe 7. Zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

betrachten wir das Verfahren von Heun mit Schrittweite h

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f\big(t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k)\big)].$$

(a) Schreiben Sie das Verfahren als Runge-Kutta Verfahren mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Ist das Verfahren explizit oder implizit?

(b) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $g(z)$.

(c) Ist das Verfahren A-stabil? Ist es L-stabil? Begründen Sie ihre Antwort.

1.5 + 1 + 1 Punkte

Aufgabe 8. Die Lösung des Hamilton'schen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} p' &= -q, \\ q' &= p, \end{aligned}$$

das sich aus der Hamiltonfunktion

$$H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2, \qquad p,q \in \mathbb{R},$$

ergibt, wird über das symplektische Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= p_j - hq_j \\ q_{j+1} &= q_j + hp_{j+1} \end{aligned}$$

approximiert.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des symplektischen Euler-Verfahrens, d.h. bestimmen Sie $p_{j+1} = p_{j+1}(p_j, q_j)$ und $q_{j+1} = q_{j+1}(p_j, q_j)$.

b) Zeigen Sie, dass das symplektische Euler-Verfahren die modifizierte Energie

$$\tilde{H}(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 - \frac{h}{2}pq$$

erhält, d.h. zeigen Sie

$$\tilde{H}(p_{j+1}, q_{j+1}) = \tilde{H}(p_j, q_j).$$

c) Das explizite und das implizite Euler-Verfahren erhalten die Hamiltonfunktion H nicht. Während der Wert von H beim expliziten Euler-Verfahren für viele Zeitschritte gegen unendlich geht, konvergiert H beim impliziten Euler-Verfahren gegen null.
Erhält das symplektische Euler-Verfahren die Hamiltonfunktion H? Was können Sie beim symplektischen Euler-Verfahren über den Wert von H nach vielen Zeitschritte aussagen? (Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Teil b))

1 + 1.5 + 1 Punkte