Aufgabe 1. Seien $D = \left\{ w \in C^2([1,\pi]) \,:\, w(1) = \pi,\ w(\pi) = 1 \right\}$ und

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(y) = \int_1^\pi \big(y(x) + xy'(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x, \qquad y \in D.$$

a) Berechnen Sie die erste Variation $\delta F(u; v)$ des Funktionals F für $u \in D$ und $v \in D_0 = \left\{ w \in C^2([1,\pi]) \,:\, w(1) = 0,\ w(\pi) = 0 \right\}$.

b) Welcher Differentialgleichung müssen die Extremalen $u \in D$ des Funktionals F genügen? Bestimmen Sie alle Lösungen $u \in D$ derselben.

c) Welcher Bedingung müssen die Extremalen $u \in E$ des Funktionals F genügen, wenn man F auf $E = \left\{ w \in C^2([1,\pi]) \,:\, w(1) = \pi \right\}$ statt auf D betrachtet? Bestimmen Sie alle Lösungen $u \in E$ der Differentialgleichung aus Teil b), die dieser Bedingung genügen.

$1.5 + 3.5 + 2$ Punkte

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = e^{-kx^2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass $f_k \in L_1(\mathbb{R})$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Konvergiert die Folge fast überall auf $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$?

c) Konvergiert die Folge gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$?

d) Konvergiert die Folge in $L_1(\mathbb{R})$ gegen eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$?

Hinweis: Es ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

$1 + 0.5 + 0.5 + 0.5$ Punkte

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Länge des Bogens $\Gamma = \gamma([-\pi, \pi])$ mit

$$\gamma : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), \cosh(t)), \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

und das Arbeitsintegral

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x,$$

für das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das durch

$$f(x, y, z) = e^x(\sin(y - z), \cos(y - z), -\cos(y - z)), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

gegeben ist. 2.5 Punkte

Aufgabe 4. Berechnen Sie das Flussintegral

$$\int_F \langle f,\ \nu \rangle \,\mathrm{d}\sigma$$

des Vektorfeldes

$$f : F \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x,\, y,\, z) = \left(x,\, y,\, z\sqrt{x^2+y^2}\right), \qquad (x,\, y,\, z) \in F$$

durch die Fläche

$$F = \Phi(B), \qquad B = [0,\, 1] \times [-\pi,\, \pi]$$

$$\Phi(p,\, q) = (p\cos(q),\, p\sin(q),\, e^p)\,, \qquad (p,\, q) \in B.$$

4 Punkte

Aufgabe 5. Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \qquad t \in (0, T), \\ y(0) &= y_0, \end{cases}$$

wobei die rechte Seite

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

der Lipschitz-Bedingung

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\|, \qquad t \in [0, T],\ y, z \in \mathbb{R}^n$$

genüge. Zeigen Sie, dass das explizite Euler-Verfahren zur Approximation der Lösung dieser Gleichung mit Zeitschrittweite $h = T/N$, $N \in \mathbb{N}$ stabil ist gegenüber Störungen im Anfangswert, indem Sie nachweisen, dass

$$\|y^N - z^N\| \leq e^{LT}\|y_0 - z_0\|, \qquad y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$$

ist, wobei y^N bzw. z^N die Approximation der Lösung nach N Schritten mit dem expliziten Euler-Verfahren zum Anfangswert y_0 bzw. z_0 bezeichnen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\|y^{j+1} - z^{j+1}\| \leq (1 + hL)\|y^j - z^j\|, \qquad j = 0, 1, \ldots, N - 1$$

2.5 Punkte

Aufgabe 6. Gegeben sei das Hamilton'sche System

$$\begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(p(t), q(t)) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(p(t), q(t)) \end{pmatrix}$$

mit

$$H(p, q) = \frac{k}{2}q^2 + \frac{1}{2m}p^2, \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

und $k, m > 0$.

a) Zeigen Sie, dass für jede Lösung $(p, q) \in C^1((0, \infty) \times (0, \infty), \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dieses Systems stets

$$H(p(t), q(t)) \equiv \text{const.}$$

ist.

b) Zeigen Sie, dass für die Approximation der Lösung dieses Systems stets

$$H(p^{j+1}, q^{j+1}) > H(p^j, q^j)$$

ist, falls (p^{j+1}, q^{j+1}) mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens aus (p^j, q^j) ermittelt wird und $(p^j, q^j) \neq (0, 0)$ ist.

1 + 2 Punkte

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass sowohl die Konsistenz- als auch die Konvergenzordnung des linearen 2-Schritt-Verfahrens, das durch die Vorschrift

$$y^{j+2} = y^j + \frac{h}{3}\big(f(t_j, y^j) + 4f(t_{j+1}, y^{j+1}) + f(t_{j+2}, y^{j+2})\big)$$

gegeben ist, mindestens 3 ist.

Hinweis: Ist das Verfahren nullstabil? 4 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $0 \notin \sigma(A)$. Es existiere ein eindeutiger, einfacher betragsmäßig größter Eigenwert und ein eindeutiger, einfacher betragsmäßig kleinster Eigenwert von A.

a) Geben Sie ein Verfahren zur Konstruktion einer Folge $(\lambda_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{C}$ an, die gegen den *betragsmäßig größten* Eigenwert von A konvergiert. Wie lassen sich die λ_k berechnen?

b) Geben Sie ein Verfahren zur Konstruktion einer Folge $(\lambda_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{C}$ an, die gegen den *betragsmäßig kleinsten* Eigenwert von A konvergiert. Wie lassen sich die λ_k berechnen?

c) Geben Sie ein Verfahren zur Konstruktion einer Folge $(\lambda_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{C}$ an, die gegen denjenigen Eigenwert von A konvergiert, der *einem gegebenen* $\mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ *am nächsten ist*. Sie können annehmen, dass μ so gewählt ist, dass ein eindeutiger, einfacher Eigenwert von A existiert, der μ am nächsten ist. Wie lassen sich die λ_k berechnen?

$1 + 1 + 2.5$ Punkte