Aufgabe 1. Betrachten Sie die Variationsaufgabe

$$f(y) := \int_0^1 (y'(x)^2 + 2y'(x)y(x) + y(x)^2)\, dx \to \min,$$

für $y \in \{y \in C^2([0,1]) : y(0) = y(1) = 0\}$.

a) Berechnen Sie die erste Variation des Funktionals f.

b) Zeigen Sie, dass die Variationsaufgabe eine eindeutige Lösung besitzt und berechnen Sie diese.

c) Formulieren Sie die natürlichen Randbedingungen für obige Variationsaufgabe. Ist die Lösung des Variationsproblems mit natürlichen Randbedingungen immer noch eindeutig?

6 Punkte

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x)/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) f ist messbar.

b) $f \in L_1(0,1)$.

*c) $f \in L_1(\mathbb{R})$.

4 (+ 2* Bonus) Punkte

Hinweis: Abschätzen führt auf harmonische Reihe.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n(x) := \frac{nx}{1 + n|x|}.$$

a) Berechnen Sie den punktweisen Limes der Funktionenfolge f_n.

Zeigen oder widerlegen Sie:

b) Die Folge konvergiert in $L_1(0,1)$.

c) Die Folge konvergiert in $L_1(\mathbb{R})$.

6 Punkte

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $\int_\gamma f \cdot dx$ für folgende Wahlen von γ und f:

a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := \big((1 + \cos t)\sin t,\ (1 + \sin(t)^2)\cos t\big)$ und $f(x,y) := ((x+y)\cos x + \sin x,\ \sin x)$.

b) $\gamma =$ Einheitskreis mit positiv orientierter Parametrisierung (gegen den Uhrzeigersinn) startend von $(1,0)$ und $f(x,y) = \frac{(x,y)}{x^2+y^2}$.

4 Punkte

Aufgabe 5. Berechnen Sie das Volumen und die Mantelfläche des Körpers

$$K := \{(x,y,z) : 0 \le x^2 + y^2 \le r,\ 0 \le z \le 1 + xy\}.$$

6 Punkte

Aufgabe 6. Betrachten Sie folgendes, aus zwei Teilschritten bestehende, Runge Kutta Verfahren:

i) $y^{j+1/2}$ wird ausgehend von y^j einen Schritt des impliziten Eulerverfahrens mit Schrittweite $h/2$ ermittelt

ii) y^{j+1} wird ausgehend von $y^{j+1/2}$ mit einem Schritt des expliziten Eulerverfahrens mit Schrittweite $h/2$ ermittelt.

Ist $y^j = y(t)$ dann wird y^{j+1} als Näherung für $y(t+h)$ verwendet.

a) Ermitteln Sie das Butchertableau für das Verfahren.

b) Ermitteln Sie die Stabilitätsfunktion.

c) Untersuchen Sie, ob das Verfahren 0-stabil und/oder A-stabil ist?

6 Punkte

Aufgabe 7. Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie durch Abschätzungen, dass die Realteile aller Eigenwerte der Matrix strikt positiv sind. Ermitteln Sie zur Kontrolle die Eigenwerte.

b) Bestimmen Sie den Eigenvektor zum größten Eigenwert näherungsweise, indem Sie 3 Schritte der (direkten) Vektoriteration ausgehend von $v_0 = [1; 1; 1]$ durchführen und vergleichen Sie mit der analytischen Lösung.

Hinweis zu a: ist 0 Eigenwert?

4 Punkte

Aufgabe 8. Wir betrachten das restringierte Optimierungsproblem

$$f(x, y) \to \min \qquad \text{so dass } g(x, y) = 0$$

a) Formulieren Sie die zugehörige Lagrangefunktion und stellen Sie das Kuhn-Tucker System auf.

b) Formulieren Sie das Newtonverfahren zur Lösung des Kuhn-Tuckersystems für allgemeines f und g, und führen Sie dann zwei Schritte des Verfahrens für das spezielle Problem $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $g(x, y) = x + y - 1$ ausgehend von $(x_0, y_0, \lambda_0) = (0, 0, 0)$ durch.

c) Eliminieren Sie für f und g wie in b) die Nebenbedingung und lösen Sie das daraus resultierende Minimierungsproblem mit dem Newtonverfahren.

6 Punkte

Insgesamt sind 42+2 Punkte erreichbar.

Notenspiegel:
21(4.0), 23(3.7), 25(3.3), 27(3.0), 29(2.7), 31(2.3), 33(2.0), 34(1.7), 35(1.3), 39(1.0)