



Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2025
Klausur | 16.03.2026

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät (permanente Tinte, kein Bleistift, kein Rotstift).
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Kopien und Druckerzeugnisse sind nicht gestattet.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am Dienstag, 31.03.2026 von 10:30-12:00 Uhr im Rogowski, ACoM Seminarraum (1090|328) statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Σ
Punkte	6	3.5	5.5	3	4	7	6	5	5	5.5	6	3	6.5	3	6	75
Ihre Punkte																

Klausur
+ Bonus
= Gesamt

+=

Note:

Aufgabe 1.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_\alpha(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha.$$

- a) Argumentieren Sie kurz, dass die Funktion f_α auf ihrem Definitionsbereich stetig und stetig differenzierbar ist.
- b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_α an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ stetig fortsetzbar?

Hinweis: Betrachten Sie eine beliebige Nullfolge in Polarkoordinaten

$$(x_n, y_n) = (r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n).$$

- c) Geben Sie die Ableitung f'_α an.
- d) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Ableitung f'_α an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ stetig fortsetzbar?
- e) Geben Sie die zweite Ableitung von f_α an. Der Ausdruck muss nicht weiter vereinfacht werden.

6 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

- a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$ye^y + y^2 + e^x = 1$$

im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ lokal nach y aufgelöst werden kann, also dass die implizit definierte Funktion $y = T(x)$ existiert.

- b) Bestimmen Sie die erste Ableitung $T'(0)$ der implizit definierten Funktion $T(x)$.

3.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 3.

- a) Sei $f(x, y) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}y^2 - \frac{7}{2}xy$. Bestimmen Sie die Extremalstelle(n) der Funktion f und stellen Sie (jeweils) fest ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.
- b) Nun seien $h(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ und die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = -\frac{3}{2}\}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion h unter der Nebenbedingung $(x, y) \in M$.
- c) Bestimmen Sie anhand der Ergebnisse aus b) und mit Hilfe einer Skizze die Lösung der Aufgabe

$$\min_{(x,y) \in M} h(x, y).$$

5.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 4.

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung (ODE)

$$y'(t) = \sin(t) - y \quad y(0) = 1$$

- a) Sind die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt?
Hat die ODE eine eindeutige Lösung?
- b) Führen Sie zwei Schritte der Picard-Iteration durch. Benutzen Sie als Startwert

$$y^{[0]}(t) = \text{const.} = y(0).$$

3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Gegeben sei die DGL

$$y'(x) = \frac{x}{2(y+1)^3}.$$

Berechnen Sie zunächst eine allgemeine Lösung in \mathbb{R} und dann die Lösung zum Anfangswert

$$y(1) = 0.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Substitution $u = (y + 1)^2$.

4 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 6.

Es seien:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie jeweils ein Fundamentalsystem der Differentialgleichungen:

a) $y' = Ay,$

b) $y' = By.$

7 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

a) Wir betrachten die folgende Wertetabelle der Funktion $f(x)$:

x_i	0	1	3
$f(x_i)$	1	2	0

Konstruieren Sie das quadratische Interpolationspolynom $p_2(x)$ welches $f(x)$ an den Punkte x_i interpoliert mittels

- i) Lagrange-Interpolation, und
 - ii) Newton-Interpolation.
 - iii) Geben sie $p_2(2)$ an.
- b) Sei nun ein allgemeines $f \in C^{n+1}([0, L])$ mit Interpolationsstellen $x_0 = 0 < x_i < x_{i+1} < x_n = L$ gegeben.
- i) Geben Sie den Interpolationsfehler $E_n[f]$ für ein Interpolationspolynom p_n vom Grad n an.
 - ii) Zeigen Sie, dass für eine ausreichend glatte Funktion $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq C \forall \xi \in [0, L]$ der Interpolationsfehler für eine Auswertung im Intervall $[0, L]$ gegen 0 geht, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n[f]| = 0.$$

6 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Für das Integral

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

soll eine Quadraturformel der Form

$$\tilde{I}(f) = \alpha (f(-1) + f(1)) + \beta f(x_0)$$

mit möglichst hohem Genauigkeitsgrad konstruiert werden.

- Bestimmen Sie die Werte für α, β, x_0 und den Genauigkeitsgrad.
- Berechnen Sie

$$\int_0^2 |x - 1|^3 dx$$

einmal direkt mit der gewonnenen Quadraturregel, sowie als Summe der zwei Integrale $\int_0^1 |x - 1|^3 dx$ und $\int_1^2 |x - 1|^3 dx$.

- Was ist der Grund für die Abweichung der Ergebnisse?

5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 9.

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 16 & -12 \\ -3 & 0 & -14 \\ 12 & 24 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Bestimmen Sie die LR -Zerlegung $PA = LR$ mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie die Matrizen P , L und R explizit an.
- b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Matrizen P , L und R aus Aufgabenteil (a).

5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 10.

Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix, die für p mit $1 \leq p < n$ die Blockdarstellung

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}, \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

Wir bezeichnen $S = C - B^T A^{-1} B$ als Schurkomplement von M .

a) Bestimmen Sie Matrizen $D \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ und $E \in \mathbb{R}^{p \times p}$ so, dass gilt

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & D^T \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

b) Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 \in \mathbb{R}^p$ und $x_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$. Zeigen Sie

$$x^T M x \geq x_2^T S x_2$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ein $y \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$x^T M x = y^T \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} y.$$

c) Zeigen Sie, dass für symmetrisch, positiv definite Matrizen die 2-Norm durch

$$\|M\|_2 = \lambda_{\max}(M)$$

gegeben ist, wobei λ_{\max} der grösste Eigenwert der Matrix ist.

d) Benutzen Sie die Relationen

$$\lambda_{\max}(M) = \max_{\|x\|=1} x^T M x$$

um aus dem Ergebnis in (b) zu folgern

$$\|S\|_2 \leq \|M\|_2$$

5.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 11.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie zunächst die Kondition $\text{cond}_{\infty} A$ bezüglich der Zeilensummennorm.
- b) Bestimmen Sie die Matrix $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, die sich aus $C = D^{-1}A$ ergibt, wobei $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $D = \text{diag}(d_1, d_2)$ mit $d_i = \sum_{j=1}^2 |a_{i,j}|$, $i = 1, 2$.
- c) Bestimmen Sie nun die Kondition $\text{cond}_{\infty} C$ bezüglich der Zeilensummennorm.

6 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 12.

Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x) := \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{3}{2}.$$

- a) Zeigen Sie per Skizze, dass die Funktion Φ einen Fixpunkt im Intervall $[0, \pi]$ hat, indem Sie x und $\Phi(x)$ einzeichnen.
- b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration auf $[0, \pi]$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt konvergiert.

3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ b(x) - y \end{pmatrix}$$

dessen Nullstelle gefunden werden soll. Hierbei ist a konstant und $b(x)$ eine beliebige Funktion.

- Finden Sie die analytische Lösung für $f(x, y) = 0$
- Wählen Sie $a = 2$ und $b(x) = x^2$ und führen Sie 3 Schritte mit dem Newton Verfahren aus, ausgehend von $(x, y) = (1, 1)$. Was beobachten Sie?
- Zeigen Sie für einen beliebigen Startwert (x_0, y_0) und eine beliebige differenzierbare Funktion $b(x)$, dass das Newton Verfahren in höchstens 2 Schritten die exakte Lösung liefert.
- In wievielen Schritten konvergiert das Newton-Verfahren für die 3D-Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \\ g_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ b(x, y) - z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} h_1(x, y, z) \\ h_2(x, y, z) \\ h_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ b_1(x) - y \\ b_2(y) - z \end{pmatrix}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sowie $b_1, b_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?
(keine Rechnung erforderlich).

6.5 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 14.

Lineare Ausgleichsrechnung ist auch in mehr als einer Raumdimension möglich. Im \mathbb{R}^3 seien folgende Punkte gegeben:

s_i	0	1	0	1
t_i	0	0	1	1
y_i	0	1	1	3

Lösen Sie das 2D-Ausgleichsproblem für den linearen Ansatz

$$y(s, t) = x_1 + x_2s + x_3t.$$

3 Punkte

Name:

Mat-Nr.:

Aufgabe 15.

Wir betrachten für einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v, v \rangle = v^T v = 1$ die Matrix

$$H = I - 2vv^T \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Dabei ist $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix.

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$H^{-1} = H^T = H$$

b) Welche Dimension hat der Unterraum $U_v = \{u \in \mathbb{R}^n, \langle u, v \rangle = 0\}$ für den gegebenen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$? Wie kann man die den Raum U_v geometrisch interpretieren?

c) Zeigen Sie, dass für den gegebenen Einheitsvektor v gilt

$$Hv = -v.$$

d) Zeigen Sie, dass für alle $u \in U_v$ gilt

$$Hu = u.$$

e) Geben Sie alle Eigenwerte von H an und berechnen Sie die Determinante $\det(H)$.

f) Berechnen Sie den Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^4$, der für die erste Householder-Reflektion H einer QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

benötigt wird.

6 Punkte

Name:

Mat-Nr.: