Prof. Dr. M. Torrilhon
Vertr.-Prof. Dr. A. Rueda-Ramírez
D. Doehring
E. Yilmaz

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2024/25
Klausur | 13.03.2025

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät (permanente Tinte, kein Bleistift, kein Rotstift).
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind. Kopien und Druckerzeugnisse sind nicht gestattet.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am Freitag, 04.04.2025 von 10:00-11:00 Uhr im Seminarraum ACoM (1090|328) Rogowski, 3. OG statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	4	2.5	7	3	3	3.5	5.5	3.5	2.5	3.5	4	3.5	3.5	3.5	2.5	55
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

a) Geben Sie für die Funktionen t, g die Mengen $\mathbb{D}_{\{t,g\}} \subseteq \mathbb{R}^3$ an auf der die jeweiligen Funktionen steitg partiell differenzierbar sind. Berechnen Sie weiter die jeweiligen Jacobimatrizen auf dieser Menge.

(i) $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1 + \frac{x_3^2}{2}, \cos(x_2), x_1^2 - x_3^2)^T$.

(ii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \boldsymbol{x} \mapsto ||\boldsymbol{x}||_2$.

b) Berechnen Sie $D(g \circ t)(-1, 0, 1)$.

c) Sei die Funktion $h : (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x, y) = (\sin x)^{\cos y}.$$

(i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen h_x und h_y .

(ii) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von h in Richtung $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ im Punkt $(\frac{\pi}{4}, 0)$.

Hinweis: $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$ und $\cot(\frac{\pi}{4}) = 1,\ \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte

Aufgabe 2.
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^x + y \sin y - z \ln z$.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

für (x, y, z) aus einer hinreichend kleinen Umgebung von $(1, \pi, e)$ nach y bzw. z aufgelöst werden kann.

b) Berechnen Sie für die Auflösungsfunktionen $y = y(x, z)$ die Ableitung $y'(1, e)$.

1.5 + 1 = 2.5 Punkte

Aufgabe 3.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2 + xy$.

a) Bestimmen & klassifizieren Sie alle lokalen Extrema von f in $\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Lagrange Formalismus alle lokalen und globalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 1$.

c) Was sind die globalen Maxima und Minima von f auf der elliptischen Fläche $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$?

2 + 4 + 1 = 7 Punkte

Aufgabe 4.

Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $y(x)$ in der Form

$$y'(x) = -x^{p-1}\,(y(x) + \alpha) \qquad (\star)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$.

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der ODE mit Hilfe der Trennung der Variablen.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der ODE über die homogene und inhomogene Lösung.

c) Welche Lösung ergibt sich für den Fall $p = 0$?

d) Betrachten Sie den Fall $p = 2$. Welcher Grenzwert ergibt sich für die allgemeine Lösung $y(x)$ für $x \to \infty$? Hängt dieser von einer Anfangsbedingung ab?

e) Wie lässt sich der Grenzwert für $x \to \infty$ direkt aus der DGL $(\star)$ herleiten, insbesondere ohne Kenntnis der Lösung?

0.5 + 1 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 5.

Gegeben sei

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0 \qquad 0 < y \in \mathbb{R}$$

mit

$$f(y) = ay^3 \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1 - 2ay_0^2 t}}$$

eine Lösung ist.

b) Geben Sie für $a > 0$ das maximale Existenzintervall $t \in [0, t_{\mathsf{max}})$ an.
Ist f auf $[y_0, \infty)$ Lipschitz-stetig? Wenn ja, geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

c) Geben Sie für $a < 0$ das maximale Existenzintervall $t \in [0, t_{\mathsf{max}})$ an.
Ist f auf $(0, y_0]$ Lipschitz-stetig? Wenn ja, geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

d) Was bedeuten die Ergebnisse aus b) und c) für die Konvergenz der Picard-Lindelöf Iteration?

0.5 + 1 + 1 + 0.5 = 3 Punkte

Aufgabe 6.

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Gleichung

$$u' = Au \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Lösung an, die

$$u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

> **Hinweis**: Für 2×2 Matrizen
>
> $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
>
> bietet es sich an, die Eigenwerte und Eigenvektoren mit der Trace/Spur Methode zu berechnen.
> Die Eigenwerte können mit der Formel
>
> $$\lambda = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - D}$$
>
> berechnet werden, wobei T die Spur/Trace und D die Determinante der Matrix ist.
> Die Eigenvektoren können zu
>
> $$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 - d \\ c \end{pmatrix}$$
>
> berechnet werden.

b) Bestimmen die allgemeine Lösung der skaleren Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

c) Geben Sie Anfangswerte $y(0)$ und $y'(0)$ für die DGL aus b) so an, dass die Lösung $y(t)$ der ersten Komponente $u_1(t)$ der konkreten Lösung aus a) entspricht.

2 + 1 + 0.5 = 3.5 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	2	4
f_i	2	0	1

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit der Lagrangeschen Interpolationsformel.

b) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit der Newtonschen Interpolationsformel.

c) Geben Sie den maximalen Fehler $\max|f(x) - P_2(x)|$ bei einer Auswertung im Intervall $[0, 6]$ an, unter der Annahme, dass

$$\max_{x \in [0,6]} \left| f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{n}{4}$$

gilt.

2 + 2.5 + 1 = 5.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 8.

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-1}^{2} x^2 \, \mathsf{d}x$$

a) mit Hilfe der Mittelpunktsregel,

b) mit Hilfe der Trapezregel,

c) mit Hilfe der Gauß-Legendre Integration mit 2 Gaußpunkten.

d) Welches Ergebnis erhalten Sie für die Gauß-Legendre Integration mit 3 Gaußpunkten?

Hinweis: Die Stützpunkte x_i und Gewichte ω_i der Gauß-Legendre Integration mit 2 Stützstellen sind

$n = 2$	x_i	ω_i
1	$-1/\sqrt{3}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	1

0.5 + 0.5 + 2 + 0.5 = 3.5 Punkte

Aufgabe 9.

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 4 & t & -8 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

und der rechten Seite

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

über den Gauß-Algorithmus in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$. Für welches t müssen Sie eine Vertauschung von zwei Zeilen durchführen?

2.5 Punkte

Aufgabe 10.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A unter Verwendung der **Zeilenpivotisierung** mit, sodass gilt:

$$PA = LR,$$

wobei P eine Permutationsmatrix, L eine untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

b) Erklären Sie den Vorteil der Pivotisierung.

3 + 0.5 = 3.5 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Kondition $\mathsf{cond}_\infty A$ bezüglich der ∞-Norm.

b) Bestimmen Sie die Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die sich aus $C = D^{-1}A$ ergibt, wobei $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}, D = \mathsf{diag}(d_1, d_2)$ mit $d_i = \sum_{j=1}^{2} |a_{i,j}|, i = 1, 2$.

c) Bestimmen Sie nun die Kondition $\mathsf{cond}_\infty C$ bezüglich der ∞-Norm.

1.5 + 1 + 1.5 = 4 Punkte

Aufgabe 12.

Das Newton-Raphson Verfahren wird auf die Funktion $f(x) = (4x^2-1)(x^2-1)$ angewandt.

a) Berechnen Sie einen Schritt des Newton-Raphson-Verfahrens ausgehend von $x_0 = 2$.

b) Zeigen Sie, dass das Verfahren für $x_0 \geq 1$ gegen eine Nullstelle von $f(x)$ konvergiert.

> **Hinweis:**
> - Zeigen Sie zunächst, dass die Folge der x_k für $x_0 \geq 1$ monoton fallend ist.
> - Benutzen Sie dann den Mittelwertsatz der Differentialrechnung um die Beschränkheit $x_k \geq 1$ zu zeigen.

1 + 2.5 = 3.5 Punkte

Aufgabe 13.

a) Wenden Sie das Newton-Verfahren auf

$$f(x) = a - \frac{1}{x}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

an und zeigen Sie, dass sich damit $\frac{1}{a}$ divisionsfrei approximieren lässt.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Banach, dass die Newton-Iteration für Startwerte aus dem Intervall $\left[\frac{1}{2a}, \frac{3}{2a}\right]$ konvergiert.

1 + 2.5 = 3.5 Punkte

Aufgabe 14.

Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine invertierbare Matrix sowie $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ orthogonale Matrizen und $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ invertierbare obere Dreiecksmatrizen. Es sei ferner gegeben, dass

$$Q_1 R_1 = A = Q_2 R_2.$$

a) Zeigen Sie, dass eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$ existiert, deren Diagonaleinträge ± 1 sind

b) Zeigen Sie, dass $Q_2 = Q_1 D$ und $R_2 = D R_1$ gilt.

Hinweis: Die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix ist ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix, und das Produkt orthogonaler Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.

2.5 + 1 = 3.5 Punkte

Aufgabe 15.

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha + \alpha t + \gamma t^2,\ \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter α und γ sollen so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

i	1	2	3	4
t_i	-1	0	1	2
$f(t_i)$	0	0	3	3

möglichst gut approximiert wird.

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf und lösen Sie sie mit einem geeigneten Verfahren.

c) Skizzieren Sie die Lösung inklusive der Messwerte.

1 + 1 + 0.5 = 2.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Viel Erfolg!