Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Vertr.-Prof. Dr. Michael Schlottke-Lakemper
Tamme Claus
Eda Yilmaz

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2023
Klausur | 14.03.2024

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 21.03.2024 von 10:00-12:00 Uhr im ACoM seminar room 1090|328 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3.5	4	3	4	3	3	4	3.5	3	4	2	3	2.5	3.5	4	50
Ihre Punkte																

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

a) Geben Sie jeweils die Teilmenge $\mathbb{D}_{\{t,f,g\}} \subseteq \mathbb{R}^3$ an, auf dem die folgenden Funktionen stetig partiell differenzierbar sind und geben Sie die entsprechende Jacobimatrix an.

(i) $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1 + \frac{x_3^2}{2}, \cos(x_2), x_1^2 - x_3^2)^T$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (t_1, t_2, t_3)^T \mapsto (\sin(t_1\pi)\cos(t_2\pi), \sin(t_1\pi)e^{t_3}, \cos(t_2\pi)e^{t_3})^T$

(iii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \boldsymbol{x} \mapsto ||\boldsymbol{x}||_2$.

Berechnen Sie $D(g \circ f \circ t)(-1, 0, 1)$.

b) Sei die Funktion $f : (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (\sin x)^{\cos y}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ im Punkt $(\frac{\pi}{4}, 0)$.

3.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 2.

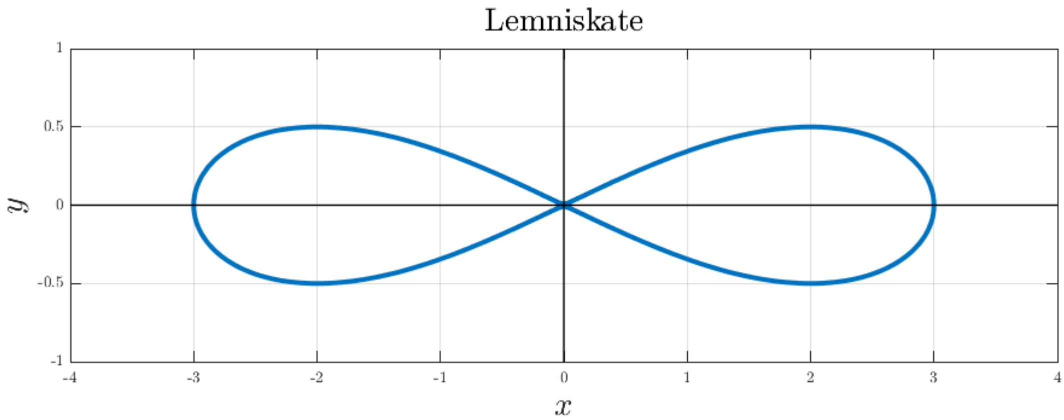
Betrachten Sie die Funktion

$$F(x,y) = (x^2 + 2y^2)^2 - 9(x^2 - 7y^2)$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. Die Punktmenge

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = 0\}$$

beschreibt eine Lemniskate:



a) Zeigen Sie, dass die Lemniskate die Punkte

$$P_1 = (0,0),\ P_2 = \left(2, \frac{1}{2}\right)\ P_3 = (3,0)$$

enthält und untersuchen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, ob an diesen Punkten eine Darstellung mit einer Funktion $y = f(x)$ möglich ist.

b) Zeigen Sie für allgemeine implizite Funktionen $f(x)$, gegeben durch $F(x, f(x)) = 0$, dass die zweite Ableitung von f am Punkt (x_0, y_0) durch

$$f''(x_0) = -\frac{(\partial_y F)^2 \partial_{xx} F - 2\partial_x F \partial_y F \partial_{xy} F + (\partial_x F)^2 \partial_{yy} F}{(\partial_y F)^3}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

gegeben ist.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der impliziten Funktion $f(x)$ am Punkt P_2 der Lemniskate.

4 Punkte

Aufgabe 3.

a) Sei $f(x, y) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}y^2 - \frac{7}{2}xy$. Bestimmen Sie die Extremalstelle(n) der Funktion f und stellen Sie (jeweils) fest ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

b) Nun seien $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ und die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = -\frac{3}{2}\}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x, y) \in M$.

c) Bestimmen Sie anhand der Ergebnisse aus b) und mit Hilfe einer Skizze die Lösung der Aufgabe

$$\min_{(x,y)\in M} f(x, y).$$

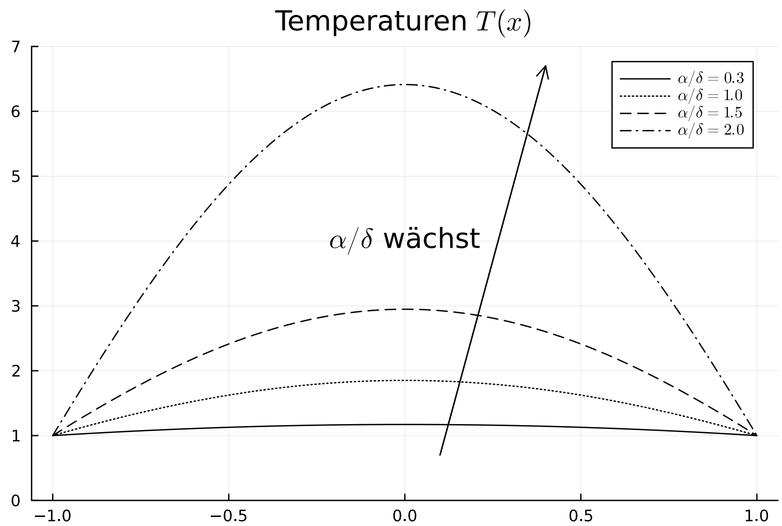
3 Punkte

Aufgabe 4.

Bei einem elektrischen Lichtbogen wirken im einfachsten Fall zwei physikalische Effekte auf das Temperaturfeld $T(x)$: Die Temperatur verteilt sich mit Leitfähigkeit δ and es wird mit dem Leistungskoeffizient α geheizt. Für einen ein-dimensionalen Querschnitt mit $x \in [-1, 1]$ zwischen zwei Wänden gilt für die unbekannte Temperatur $T(x)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-\delta\, T''(x) = \alpha\, T(x)$$

wobei wir $\delta \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ annehmen. Für verschiedene Fälle sieht die Temperatur so aus



a) Berechnen Sie die Lösung $T(x)$ der ODE mit den Bedingungen

$$\begin{aligned} T'(0) &= 0 \qquad \text{(Symmetrie)} \\ T(1) &= 1 \qquad \text{(Randbedingung)} \end{aligned}$$

für allgemeine Werte von δ, α.

b) Welchen Wert hat die Temperatur bei $x = 0$ in Abhängigkeit von δ und α? Welche Temperatur $T(0)$ gilt für $\alpha = 0$, d.h. ohne Heizung?

c) Für ein kritisches Verhältnis

$$\frac{\alpha}{\delta} = C_{\text{krit}}$$

ergibt sich für $T(0)$ ein unendlicher Wert (sog. *Blow-up*). Bestimmen Sie den kleinesten Wert C_{krit}?

d) Der Blow-Up entsteht durch die positive Rückkopplung: "Höhere Temperatur $\rightarrow$ Mehr Heizleistung". Berechnen Sie die Lösung der ODE ohne Rückkopplung (konstante Heizung)

$$-\delta\, T''(x) = \alpha$$

mit den Bedingungen aus (a). Welcher Wert ergibt sich hier für $T(0)$ in Abhängigkeit von δ und α?

4 Punkte

Aufgabe 5.

Betrachte das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = y^{\alpha}(t), \qquad y(0) = y_0 \geq 0,\ t \in [0, T]$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ und $y : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

a) Welche Aussage können Sie zu Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in Abhängigkeit von $\alpha,\ T$ und y_0 nach dem Satz von Picard-Lindelöf machen?

b) Für $0 < \alpha < 1$ und $y_0 = 0$ ist $y(t) = 0$ eine Lösung. Finden Sie eine weitere Lösung mithilfe des Ansatz $y(t) = at^{\beta}$ mit $a, \beta \in \mathbb{R}$.

c) Löse für $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ und $\alpha > 1$.

3 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben ist das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Vektorfunktion $(x(t), y(t))^T$

$$\begin{aligned} \tfrac{dx(t)}{dt} &= f(x(t), y(t)) \\ \tfrac{dy(t)}{dt} &= g(x(t), y(t)) \end{aligned} \tag{$\star$}$$

mit der rechten Seite

$$\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x\,y \\ \alpha(x\,y - y) \end{pmatrix}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$) ein Parameter ist.

a) Zeigen Sie, dass der konstante Vektor $(x(t), y(t))^T = (1,1)^T$ eine Lösung des Systems ist.

b) Betrachten Sie die Abweichung

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass kleine Abweichungen $\widetilde{x}(t)$ und $\widetilde{y}(t)$ das ODE System

$$\begin{aligned} \tfrac{d\widetilde{x}(t)}{dt} &= -\widetilde{y}(t) \\ \tfrac{d\widetilde{y}(t)}{dt} &= \alpha\,\widetilde{x}(t) \end{aligned} \tag{$\blacklozenge$}$$

erfüllen in dem Sie $x(t) = 1 + \varepsilon\,\widetilde{x}(t)$ und $y(t) = 1 + \varepsilon\,\widetilde{y}(t)$ mit $\varepsilon > 0$ in das System ($\star$) einsetzen und Terme $O(\varepsilon^2)$ vernachlässigen.

c) Wie lautet die allgemeine Lösung für $\widetilde{x}(t)$ und $\widetilde{y}(t)$ gemäß des linearisierten Systems ($\blacklozenge$)? Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung periodisch ist und geben sie die Kreisfrequenz an, mit der die Lösung periodisch ist.

d) Zeigen Sie, dass entlang von Lösungen $(x(t), y(t))^T$ des vollen Systems ($\star$) mit $x(t) > 0$ und $y(t) > 0$ die skalare Funktion

$$A(x,y) = y - \ln y + \alpha(x - \ln x)$$

konstant ist. Zeigen Sie ausserdem, dass $A(x,y)$ konvex ist und bei $(x,y) = (1,1)$ ein Minimum hat.

e) Das Ergebnis in c) zeigt, dass Lösungen $(x(t), y(t))^T$ für kleine Abweichungen von $(1,1)$ periodisch sind und im (x,y)-Diagramm Kreise beschreiben. Argumentieren Sie mit dem Ergebnis aus d), dass auch alle allgemeinen Lösungen $(x(t), y(t))^T$ des vollen Systems ($\star$) mit $x(t) > 0$ und $y(t) > 0$ periodisch sind (z.B. mit einer Skizze).

3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 7.

a) In einer numerischen Simulation werden Funktionswerte $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ einer Funktion f an den Stellen x_0, x_1, x_2 berechnet. Geben Sie die expliziten Formel einer Newton-Interpolation zur Approximation der Funktion $f(x)$ und zur Approximation der Ableitung $f'(x)$ an.

b) Seien nun die folgenden Funktionswerte gegeben.

i	0	1	2
x_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y_i	2	3	1

Berechnen Sie die Newton-Approximation von $f(0)$ und $f'(0)$.

c) Angenommen die Funktion f ist dreimal stetig differenzierbar. Wie lautet der Interpolationsfehler für $f(0)$ mit den Funktionswerten aus b)?

4 Punkte

Aufgabe 8.
Berechnen sie das Integral

$$\int_{-2}^{3} x^2 \, \mathrm{d}x$$

a) analytisch,

b) mit Hilfe der Trapezregel,

c) mit Hilfe der Gauß-Legendre Integration mit 2 Gaußpunkten

Hinweis: Die Stützpunkte und Gewichte der Gauss-Legendre Interpolation mit 2 Gaußpunkten für $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{2} w_i f(x_i)$ sind:

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad w_1 = 1 \quad w_2 = 1$$

3.5 Punkte

Aufgabe 9.

a) Finden Sie die Quadraturformel $Q(f)$ der Form:

$$Q(f) = w_0\, f(-1) + w_1\, f(x_1) + w_2\, f(1) \approx \int_{-1}^{1} f \,\mathrm{d}x$$

mit maximalem Exaktheitsgrad.

b) Wie hoch ist der Exaktheitsgrad von $Q(f)$?

> **Hinweis:** Falls Sie das Gleichungssystem in a) nicht lösen können, nehmen Sie $x_1 = 0$ an.

c) Welchen Exaktheitsgrad hätte eine Gauß-Quadratur mit 3 Stützstellen/Quadraturpunkten?

3 Punkte

Aufgabe 10.

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 16 & -12 \\ -3 & 0 & -14 \\ 12 & 24 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung $PA = LR$ mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Matrizen P, L und R aus Aufgabenteil (a).

4 Punkte

Aufgabe 11.

Anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ werde das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst. Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

in der Maximumsnorm an, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

2 Punkte

Aufgabe 12.

Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x) := \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{3}{2}.$$

a) Zeigen Sie per Skizze, dass die Funktion Φ einen Fixpunkt im Interval $[0, \pi]$ hat, indem Sie x und $\Phi(x)$ einzeichnen.

b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration auf $[0, \pi]$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt konvergiert.

3 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 13.

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + y \sin x &= \pi + 1 \\ y + x \cos y &= -(\pi + 1) \end{cases} .$$

(a) Stellen Sie dieses Gleichungssystem in ein Nullstellenproblem um.

(b) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $(x^0, y^0) = (0, \pi)$ aus, um eine Lösung des in a) gefundenen Nullstellenproblems zu approximieren.

2.5 Punkte

Aufgabe 14.

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha + \alpha t + \gamma t^2,\ \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter α und γ sollen so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

i	1	2	3	4
t_i	-1	0	1	2
$f(t_i)$	0	0	3	3

möglichst gut approximiert wird.

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf und lösen Sie sie mit einem geeigneten Verfahren.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass alle Eigenwerte der Matrix $A^\mathsf{T} A$ positiv sind.

c) Skizzieren Sie die Lösung inklusive der Messwerte.

3.5 Punkte

Name: Mat-Nr.:

Aufgabe 15.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mittels Householder-Transformationen eine QR-Zerlegung von A (ohne explizites Berechnen von Q).

4 Punkte

Name: Mat-Nr.: