Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle
Paul Wilhelm
Donat Weniger

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2022
Klausur | 08.03.2023

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 15.03.2023 von 14:00-15:00 Uhr im 1090|328 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	3.5	4	6	4	3	3.5	2	5	2.5	3.5	2.5	2.5	2.5	2.5	3	50
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} y \sin \frac{x}{y} & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}$

Begründen oder widerlegen Sie die Stetigkeit von f.

b) Seien die Funktionen f, g wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x,y) = (y\cos(x), e^x, x) \\ g &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad g(x,y,z) = xy + z. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Verkettung $h := g \circ f$ mit Hilfe der Kettenregel.

c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = y \cdot \mathrm{e}^{x+2z} + z \cdot \mathrm{e}^{-y},$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Richtungsableitung ist gegeben durch

$$f'_{\tilde{v}}(x_0) = \nabla f|_{x_0} \cdot \tilde{v},$$

wobei

$$\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|_2}$$

3.5 Punkte

Aufgabe 2.

a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und es existieren $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, so dass $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Wann kann man F in der Nähe von $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ eindeutig nach (y, z) auflösen, d.h. unter welchen Voraussetzungen an F ist der Satz von der impliziten Funktion anwendbar?

b) Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 &= 1, \\ xyz &= 1. \end{cases}$$

Sei (x_0, y_0, z_0) eine Lösung von $(\mathcal{P})$. Unter welchen Voraussetzungen ist $(\mathcal{P})$ in der Nähe von $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ eindeutig nach (y, z) auflösbar, d.h. wann gibt es ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und zwei Funktionen $z(x), y(x)$ die $(\mathcal{P})$ für alle $x \in I$ lösen?

c) Bestimmen Sie $z'(x_0)$ und $y'(x_0)$.

4 Punkte

Aufgabe 3.

Sei

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und

$$f(x, y, z) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2$$

für $a > b > c > 0$.

Zeigen Sie, dass $\max f = (a - c)^2/4$ und $\min f = 0$ unter der Nebenbedingung S.

6 Punkte

Aufgabe 4.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichung:

$$y''' - 3y' + 2y = 0.$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 2.$$

4 Punkte

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot (y(x))^3.$$

a) Sei $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}xy^3$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ lokal Lipschitz-stetig in y ist. Ist f auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ auch gleichmäßig Lipschitz-stetig in y?

b) Lösen Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1$ durch Separation der Variablen.

c) Zeigen Sie, dass diese Lösung nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert und begründen Sie warum das nicht der Aussage von Picard-Lindelöf widerspricht.

3 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned}
u_1'(t) &= -2u_2(t),\\
u_2'(t) &= -2u_1(t),\\
u_3'(t) &= -\frac{7}{2}u_1(t) - \frac{7}{2}u_2(t) + 5u_3(t),
\end{aligned}$$

a) Formulieren Sie dieses DGL-System als lineares System erster Ordnung der Form

$$y'(t) = Ay(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, y\colon I \to \mathbb{R}.$$

b) Finden Sie das Fundamentalsystem zu der ODE $y'(t) = Ay(t)$.

c) Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangswerte

$$u_1(0) = 1, \qquad u_2(0) = 1, \qquad u_3(0) = 1.$$

3.5 Punkte

Aufgabe 7.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{2})$.

a) Bestimmen Sie das Lagrange-Polynom zweiten Grades, welches f in den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ interpoliert.

b) Berechnen Sie mithilfe des Neville-Aitken-Schemas den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 2$.

2 Punkte

Aufgabe 8.
Sei

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)\, dx.$$

(a) Berechnen Sie eine Näherung von I mit Hilfe der Trapezregel.

(b) Berechnen Sie ein Näherung von I mit Hilfe der summierten Trapezregel mit Zerlegung in drei äquidistante Teilintervalle.

(c) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der summierten Simpson-Regel, wobei das Intervall nicht in Teilintervalle zerlegt werden soll, d.h. $N = 1$.

(d) Schätzen Sie die Fehler der Trapezregel, der summierten Trapezregel und der Simpsonregel ab. Welche der benutzten Quadraturen minimiert den Fehler?

5 Punkte

Aufgabe 9.

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 4 & t & -8 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

und der rechten Seite

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

über den Gauß-Algorithmus in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$. Für welches t müssen Sie eine Vertauschung von zwei Zeilen durchführen?

2.5 Punkte

Name: Matriculation-Nr.:

Aufgabe 10.

Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix, die für p mit $1 \le p < n$ die Blockdarstellung

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}^{p\times p}.$$

Wir bezeichnen $S = C - B^T A^{-1} B$ als Schurkomplement von M.

(a) Bestimmen Sie Matrizen $D \in \mathbb{R}^{(n-p)\times p}$ und $E \in \mathbb{R}^{p\times p}$ so, dass gilt

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & D^T \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

(b) Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 \in \mathbb{R}^p$ und $x_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$. Zeigen Sie

$$x^T M x \ge x_2^T S x_2$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ein $y \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$x^T M x = y^T \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} y.$$

(c) Zeigen Sie, dass für symmetrisch, positiv definite Matrizen die 2-Norm durch

$$\|M\|_2 = \lambda_{\mathsf{max}}(M)$$

gegeben ist, wobei λ_{max} der grösste Eigenwert der Matrix ist.

(d) Benutzen Sie die Relationen

$$\lambda_{\mathsf{max}}(M) = \max_{\|x\|=1} x^T M x$$

um aus dem Ergebnis in (b) zu folgern

$$\|S\|_2 \le \|M\|_2$$

3.5 Punkte

Aufgabe 11.

Anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ werde das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst. Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 2.8 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

in der Maximumsnorm an, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

2.5 Punkte

Aufgabe 12.
Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x) := \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}.$$

a) Zeigen Sie per Skizze, dass die Funktion Φ einen Fixpunkt im Interval $[-\pi/2, \pi]$ hat, indem Sie x und $\Phi(x)$ einzeichnen.

b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration auf $[0, \pi/2]$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt konvergiert.

2.5 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ (x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{pmatrix} -x^2 + \cos(y) \\ \log(y+1) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Führen Sie ausgehend von $(x_0, y_0) = (2, 0)$ <u>*einen Schritt*</u> des *Newton*-Verfahrens durch.

2.5 Punkte

Aufgabe 14.

Lineare Ausgleichsrechnung ist auch in mehr als einer Raumdimension möglich. Im $\mathbb{R}^3$ seien folgende Punkte gegeben:

s_i	0	1	0	1
t_i	0	0	1	1
y_i	0	1	1	3

Lösen Sie das 2D-Ausgleichsproblem für den linearen Ansatz

$$y(s,t) = x_1 + x_2 s + x_3 t.$$

2.5 Punkte

Aufgabe 15.

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R

a) mit Hilfe der Householder-Reflexionen,

b) mit Hilfe der Givens-Rotation,

so dass $\mathcal{A} = QR$ gilt.

3 Punkte