Prof. Dr. Manuel Torrilhon

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2021
Klausur | 11.03.2022

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 25.03.2022 von 10:00-12:00 Uhr im Seminarraum 115 im Rogowski Gebäude in der Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	6,5	5	8,5	6	18,5	6	5,5	6	9	5,5	6,5	5	4	4	4	100
Ihre Punkte																

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.
Gradient

a) Berechnen sie den Gradienten ∇f der folgenden Funktion:

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : f(\alpha, z, S, b_0) = x \sin(\alpha z) + y \cos S - \alpha + S\alpha z + e^{-z+\cos(\alpha^2)} - 3(Sx)^2$$
$$x \in \mathbb{R}, y \in \{0, -1, 1\}$$

Jacobi-Matrix

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $Df = J_f = f'$ von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \sin y - 3y^2 \cos(z^2 x) \\ xyz - (xyz)^2 + e^{xy^2 z^3} \end{pmatrix}$$

Kettenregel

c) Seien die Funktionen f, g wie folgt definiert:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(x, y) = (y \cos(x), e^x, x)$$
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad g(x, y, z) = xye^z.$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Verkettung $h := g \circ f$ mit Hilfe der Kettenregel.

2,5+2+2 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben sei die Gleichung

$$\exp(xy) - y^2 \cos(z) = 1 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung in einer Umgebung von $(x, y, z) = (0, 1, \pi/2)$ eindeutig nach z aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen

$$\partial_x z(0, 1) \qquad\qquad \partial_y z(0, 1).$$

3+2 Punkte

Aufgabe 3.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2 + xy$.

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f in $\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Lagrange Formalismus alle lokalen und globalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 1$.

c) Was sind die globalen Maxima und Minima von f auf der elliptischen Fläche $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$?

3+3,5+2 Punkte

Aufgabe 4.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}(x^2 + 2y)^3 + \exp(x - y).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f)$ von f an der Stelle $(\pi, 0)$.

6 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sind verschiedene Differentialgleichungen. Berechnen Sie jeweils die allgemeine Lösung, bzw. die Lösung des Anfangswertproblems:

(a) Für $y : \mathscr{D} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$ mit Definitionsbereich $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$:

$$y'(x) = 7x^2 y(x)^3$$

mit $y(2) = 3$. Geben Sie außerdem für die allgemeine Lösung den maximalen Definitionsbereich $\mathscr{D}$ an.

(b) Für $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto x(t)$

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = f(t)$$

mit den rechten Seiten $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t$ sowie $f_3(t) = e^{-t}$. Bei welchen rechten Seiten ist die Lösung stabil, d.h. $\lim_{t\to\infty} |x(t)| < \infty$?
Hinweis: Achten Sie auf den Zielbereich der Lösung.

(c) Für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$

$$y'(x) = 6x - 3y(x) + 11$$

mit $y(0) = 0$.

(d) Für $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto x(t)$

$$x'(t) = t - \frac{x(t)}{t}$$

mit $x(1) = a$. Bei welchen Werten von $a \in \mathbb{R}$ ist die Lösung $x(t)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$?

5+7+3+3,5 Punkte

Aufgabe 6.

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{1}{3}xy(x)^3$$

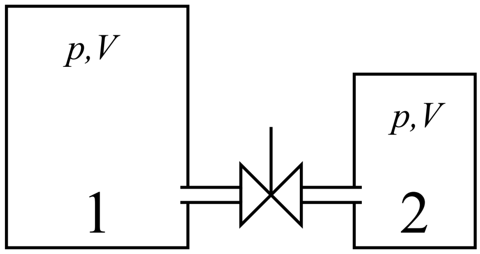
(a) Sei $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}xy^3$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ lokal Lipschitz-stetig in y ist. Ist f auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ auch gleichmäßig Lipschitz-stetig in y ?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1$ durch Separation der Variablen.

(c) Zeigen Sie, dass diese Lösung nicht für alle Zeiten existiert und begründen Sie warum das nicht der Aussage von Picard-Lindelöf widerspricht?

3+1+2 Punkte

Aufgabe 7.



Zwei Druckluftbehälter mit unterschiedlichen Volumina V_1 und V_2 sind durch eine zunächst verschlossene Rohrleitung verbunden. Vor Öffnen des Sperrventils zu $t = 0$ herrschen in den Behältern unterschiedliche Druckpegel $p_1(0)$ und $p_2(0)$ vor.
Aus der Zustandsgleichung idealer Gase

$$pV = nRT$$

mit n Stoffmenge, R Gaskonstante, T Temperatur, erhalten wir unter Annahme eines isothermen Ausgleichs den Zusammenhang

$$p'(t)V = n'(t)RT$$

und mit dem Strömungswiderstand W der Rohrleitung,

$$n' = Wp \qquad \text{und} \qquad a_{1,2} := \frac{RT}{WV_{1,2}}$$

das folgende System für das Modell

$$\begin{pmatrix} p_1'(t) \\ p_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie zunächst die allgemeine Lösung und bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $p_1(0) = 1\,\mathrm{bar}$, $p_2(0) = 9\,\mathrm{bar}$, $a_1 = 1\,\mathrm{bar\,s^{-1}}$ und $a_2 = 3\,\mathrm{bar\,s^{-1}}$.

a) Welcher Behälter erreicht einen Druck von zwei Bar und nach welcher Zeit?

b) Welcher Druck wird nach vollständigem Druckausgleich erreicht werden?

Hinweis: Sie dürfen ohne Punktabzug einheitslos rechnen, bei der finalen Beantwortung die obigen Fragen sind jedoch die passenden Einheiten anzugeben.

3,5+2 Punkte

Aufgabe 8.

a) Bestimmen Sie die Lagrange-polynome $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, für $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ nach der Formel aus der Vorlesung.

b) Bestimmen Sie das resultierende Langrange-Interpolationspolynom für folgende Funktionswerte an den Stützstellen: $f(x_0) = 2,\ f(x_1) = -1,\ f(x_2) = 5$.

c) Leiten Sie analog zu der Vorlesung eine obere Schranke für den Interpolationsfehler auf $[0, h]$ her für $n = 2$ und den Stützstellen $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{h}{2},\ x_3 = h$.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 9.

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ b(x) - y \end{pmatrix}$$

dessen Nullstelle gefunden werden soll. Hierbei ist a konstant und $b(x)$ eine beliebige Funktion.

a) Was ist die exakte Form der Lösung von $f(x, y) = 0$?

b) Wählen Sie $a = 2$ und $b(x) = x^2$ und führen Sie 3 Schritte mit dem Newton Verfahren aus, ausgehend von $(x, y) = (1, 1)$. Was beobachten Sie?

c) Zeigen Sie für einen beliebigen Startwert (x_0, y_0) und eine beliebige differenzierbare Funktion $b(x)$, dass das Newton Verfahren in höchstens 2 Schritten die exakte Lösung liefert.

1+4+4 Punkte

Aufgabe 10.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch und positiv definit (SPD)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie zwei beliebige Methoden an, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, wobei die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist.

b) Geben Sie zwei beliebige Methoden an, um die Determinante der Matrix A auszuwerten, wobei die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist.

c) Bestimmen Sie die Matrix L mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$. Werten Sie danach die Determinante der Matrix A aus.

1+1+3,5 Punkte

Aufgabe 11.

Betrachten Sie die Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Berechnen Sie die Kondition der Matrix bezüglich der Maximum- und 1-Norm für den Fall $n = 2$.

(b) Die Inverse der Matrix lässt sich durch Verwendung der Neumann'schen Reihe berechnen. Es gilt mit Einheitsmatrix Id

$$(Id - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

falls $\|T\| < 1$. Identifizieren Sie T für die Berechnung von A_n^{-1} und rechnen Sie $T^k = 0$ für $k \geq n - 1$ nach. Wie lautet die allgemeine Inverse von A_n? ($\|T\| < 1$ muss nicht gezeigt werden)

(c) Berechnen Sie die Kondition der Matrix bezüglich der Maximum- und 1-Norm für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ mit der Formel aus (b) oder direkt.

1,5+2+3 Punkte

Aufgabe 12.
Vorgelegt sei die Funktion $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\phi(x) = xe^{-x} + 1.$$

a) Zeigen Sie dass ϕ genau einen Fixpunkt hat.

   Hinweis : Bestimmen Sie dazu ein geeignete Intervall, auf dem ϕ selbstabbildend ist.

b) Geben Sie eine obere Schranke für die Anzahl der Iterationen an, die man höchtes benötigt, um mittels

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \qquad \text{ausgehend von} \qquad x_0 = 1,$$

   der Fixpunkt x^* bis auf einen Fehler von 10^{-5} zu bestimmen.

4+1 Punkte

Aufgabe 13.

Führen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi y) \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch.

4 Punkte

Aufgabe 14.

Gegeben seien die Messwerte

k	1	2	3	4
α_i	0	0.5	1	1.5
x_i	-1	2	-1	-4

für die Größe $x(\alpha)$, die folgende Gleichung erfüllt:

$$x(\alpha) = r\,\cos(\alpha\pi) + s\,.$$

Bestimmen Sie r und s optimal im Sinne der kleinesten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende Minimierungsproblem und lösen Sie dieses über die Normalengleichungen.

4 Punkte

Aufgabe 15.

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie das Ergebnis $A^{(1)}$ nach dem ersten Schritt einer QR-Zerlegung mit Householder-Reflexionen an.

4 Punkte