Prof. Dr. Sebastian Noelle
Dr. Matthias Kirchhart

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2020
Klausur | 22.03.2021

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 29.03.2021 von 16:00-17:00 Uhr im RWTHMoodle / Zoom statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$
Punkte	6	11	7	10	6	5	8	5	12	7	7	8	8	100
Ihre Punkte														

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Sei f definiert durch

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ (x,y) \mapsto f(x,y) := (x+2y^2)^3 + \cos(x-y). \end{cases}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2[f](x,y)$ von f an der Stelle $(\pi, 0)$.

6 Punkte

Aufgabe 2.

a) Sei f definiert durch

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ (x,y) \mapsto f(x,y) := -\frac{3}{2}x^2 + 12xy - 4y^2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Extremalstellen der Funktion f. Geben Sie falls möglich an, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

b) Nun seien $f(x,y) = (x+2)^2 + y^2$ und die Menge $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 4\right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der *Lagrange*-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x,y) \in \mathcal{M}$.

c) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion f aus b), die Menge $\mathcal{M}$, sowie alle Kandidaten für Extrema auf $\mathcal{M}$ in einem xy-Diagramm. Bestimmen Sie das gesuchte Minimum anhand der Skizze:

$$\min_{(x,y)\in\mathcal{M}} f(x,y).$$

5+4+2 Punkte

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$y\cos(x) = -x\sin(y)$$

im Punkt $(0,0)$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Auflösung im Punkt $x = 0$.

c) Ist die Gleichung im Punkt $(0,0)$ auch nach x auflösbar?

3+1+3 Punkte

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme

a) $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

b) $y' + 4y = \mathrm{e}^{-2t}, \quad y(0) = \frac{3}{2}.$

5+5 Punkte

Aufgabe 5.

a) Sei $y'(t) = f(t, y)$ eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung mit $f(t, y) = \dfrac{y+1}{t+2}$.
Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ mit

i) $y(0) = 0$,

ii) $y(0) = 1$.

b) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das Gleichungssystem

$$\begin{cases} u_1' & = u_1 + 2u_2, \\ u_2' & = -3u_1 - 4u_2, \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad \begin{cases} u & = (u_1, u_2)^\top, \\ u' & = Au \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \end{cases}$$

Geben Sie die Lösung an, die $u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllt.

3+3 Punkte

Aufgabe 6.

Seien f und g wie folgt definiert:

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \\ (x,y) \mapsto f(x,y) := (x^2 y, e^{xy}, \sin(x-y)), \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) := xz + 7y^2. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die *Jacobi*-Matrizen $Df(x,y)$ und $\nabla g(x,y,z)$.

b) Bestimmen Sie $D(g \circ f)\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mit Hilfe der Kettenregel.

c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y)$ in Richtung des Einheitsvektors $(v_1, v_2)^\top$ im Punkt (x_0, y_0).

3+1+1 Punkte

Aufgabe 7.

Entwickeln Sie eine Quadraturformel für das Intervall $[-1, 1]$ mit 2 Stützstellen x_0, x_1, wobei $x_1 = 1$ vorgegeben ist:

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(1).$$

Bestimmen Sie c_0, c_1, x_0 so dass der Exaktheitsgrad möglichst groß wird.

8 Punkte

Aufgabe 8.

Anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ werde das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst. Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 2.8 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

in der Maximumsnorm an, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

5 Punkte

Aufgabe 9.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = QR$ gilt.

b) Bestimmen Sie die *Cholesky*-Zerlegung der Matrix B mit $B := A^\top A$.

6+6 Punkte

Aufgabe 10.

Bestimmen Sie die *Cholesky*-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben sind folgende Messwerte

i	1	2	3	4
t_i	0	0.5	1	1.5
y_i	-1.1	2.1	-1.1	-3.9

für die Größe $y(t)$, die der Gleichung

$$y(t) = p \sin(\pi t) + q$$

genügt. Bestimmen Sie p und q optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende Minimierungsproblem, und lösen Sie dieses über die Normalengleichungen.

7 Punkte

Aufgabe 12.

Gegeben ist die Werte-Tabelle für eine Funktion $y = f(x)$

i	0	1	2	3
x_i	-3	1	2	3
y_i	2	1	-1	0

a) Finden Sie eine Approximation für $f(0)$ durch Interpolation mit Hilfe des *Neville-Aitken* Schemas für die ersten drei Punkte (x_i, y_i) mit $i = 0, 1, 2$.

b) Geben Sie das Interpolationspolynom $P(y|x_0, x_1, x_2, x_3)(x)$ zu den Daten (x_i, y_i) für $i = 0, 1, 2, 3$ in der *Lagrange*-Basis an.

4+4 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ (x, y) \mapsto f(x, y) := \begin{pmatrix} -x^2 + \cos(y) \\ \log(y + 1) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Führen Sie ausgehend von $(x_0, y_0) = (2, 0)$ ***einen Schritt*** des *Newton*-Verfahrens durch.

8 Punkte

Viel Erfolg!