Prof. Dr. Benjamin Stamm
Dr. Alexander Litvinenko

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2019
Klausur | 10.03.2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 24.03.2020 von 11:00–12:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	4	10	4	5	12	9	6	8	6	7	6	4	7	7	5	100
Ihre Punkte																

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.
Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x, y) = (y^2 x, e^x, e^{xy}), \quad g(x, y, z) = x^2 + yz.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $Df(x, y)$ und $\nabla g(x, y, z)$.

b) Bestimmen Sie $D(g \circ f)(0, 0)$ mit Hilfe der Kettenregel.

3+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Sei $f(x,y) = \left(1 - x^2 - y^2\right)^2$. Bestimmen Sie alle Extremalstellen der Funktion f. Geben Sie falls möglich an, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

b) Skizzieren Sie die Höhenlinien von f sowie die Lage der Extremstellen in einem xy-Diagramm.

c) Nun seien $f(x,y) = x^2 + y^2$ und die Menge $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1\right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x,y) \in \mathcal{M}$.

d) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion f, die Menge $\mathcal{M}$, sowie alle Kandidaten für Extrema auf $\mathcal{M}$ in einem xy-Diagramm. Bestimmen Sie das gesuchte Minimum anhand der Skizze:

$$\min_{(x,y)\in\mathcal{M}} f(x,y).$$

3+1+4+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$ye^y + y^2 + e^x = 1$$

im Punkt $(0, 0)$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Auflösung im Punkt $x = 0$.

3+1 Punkte

Aufgabe 4.
Gesucht ist eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$x_1 = \frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2), \quad 3x_2 = e^{-x_1 - x_2}.$$

a) Formulieren Sie das Problem in ein äquivalentes Fixpunktproblem um. Geben Sie dazu eine Funktion Φ mit folgenden Eigenschaften an:
   i) Fixpunkt(e) von Φ lösen das Gleichungssystem.
   ii) Die Funktion Φ ist eine Kontraktion, d.h. es existiert ein $L < 1$, sodass für alle $(x, y) \in [0, 1]^2$ gilt:
   $$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty$$

b) Berechnen Sie den ersten Schritt der Fixpunktinteration mit $x_0 := (0, 0)^\top$. Geben Sie mithilfe des Ergebnisses eine Schranke k an, sodass für alle $n \geq k$, $\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{1}{4}$ gilt.

Hinweis: Da kein Taschenrechner erlaubt ist, können Logarithmen unausgewertet stehen bleiben.

3+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 5.

Es seien:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie jeweils ein Fundamentalsystem der Differentialgleichungen:

a) $y' = Ay$,

b) $y' = By$.

6+6 Punkte

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme

a) $y''' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 9.$

b) $y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 2.$

4,5+4,5 Punkte

Aufgabe 7.
Berechnen Sie das Integral

$$\mathcal{I} = \int_{-2}^{2} x^2 \, \mathrm{d}x$$

a) analytisch,

b) mit Hilfe der Mittelpunktsregel,

c) mit Hilfe der Trapezregel,

d) mit Hilfe der Gauß-Legendre Integration mit 2 Gaußpunkten.

e) mit Hilfe der Gauß-Legendre Integration mit 3 Gaußpunkten.

Hinweis: Die Stützpunkte x_i und Gewichte ω_i der Gauß-Legendre Integration mit 2 und 3 Gaußpunkten sind

$n=2$	x_i	ω_i
1	$-1/\sqrt{3}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	1

$n=3$	x_i	ω_i
1	$-\sqrt{3}/\sqrt{5}$	$5/9$
2	0	$8/9$
3	$\sqrt{3}/\sqrt{5}$	$5/9$

1+1+1+2+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R

a) mit Hilfe der Householder-Reflexionen,

b) mit Hilfe der Givens-Rotation,

so dass $\mathcal{A} = QR$ gilt.

4+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 9.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	3	10
f_i	2	0	20

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit der Lagrangeschen Interpolationsformel.

b) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit der Newtonschen Interpolationsformel.

3+3 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 10.

Gegeben sei die Funktion f durch

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) := \xi + \eta \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \zeta \sin\left(\frac{t}{2}\right), \qquad \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die Parameter ξ, η und ζ sollen so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

$(t_i)/\pi$	2	3	8	9
$f(t_i)$	26	4	22	20

möglichst gut approximiert wird.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblems. Geben Sie die Matrix A und den Vektor b explizit an.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf.

c) Lösen Sie die Normalengleichung mit einem geeigneten Verfahren.

d) Bestimmen Sie die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ des Residuums $r = b - Ax$.

4+1+1+1 Punkte

Aufgabe 11.
Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$x = \varphi(x) := \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{5}{2}.$$

a) Zeigen Sie per Skizze, dass die Funktion φ einen Fixpunkt im Interval $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ hat, indem Sie x und $\varphi(x)$ einzeichnen.

b) Beweisen Sie, dass die Fixpunktiteration auf $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt konvergiert.

2+4 Punkte

Aufgabe 12.

Es sei $Q(h)$ eine summierte Quadraturformel, für die die Fehler-Entwicklung

$$Q(h) = \int_a^b f(x)\,dx + c_0 h^2 + c_1 h^4$$

gilt. Hierbei sind $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten die nur von der Funktion f abhängen und nicht von h. Für die Schrittweite gelte $h \leq 1/2$.

a) Gegeben seien die Auswertungen $Q(h)$ und $Q\left(\frac{h}{2}\right)$. Kombinieren Sie die Auswertungen mit Hilfe der Fehler-Entwicklung so, dass Sie eine genauere Approximation $\tilde{Q}(h)$ an das Integral bekommen.

b) Bestimmen Sie den Fehler von $\tilde{Q}(h)$ in (a) in der Form $\|\tilde{Q}(h) - \int_a^b f(x)\,dx\| = Ch^q$ und geben Sie C und q in Abhängigkeit von c_1 an.

3+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 13.

a) Sei $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische, reelle Matrix.

   i) Wann heißt $\mathcal{M}$ symmetrisch?

   ii) Wann heißt $\mathcal{M}$ positiv definit?

b) Sei $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nun symmetrisch und positiv definit (s.p.d.). Nennen Sie *zwei* beliebige Verfahren, um Systeme der Form $\mathcal{M}x = b$ zu lösen.

c) Nennen Sie *zwei* beliebige Verfahren, um die Determinante $\det \mathcal{M}$ einer symmetrisch postiv definiten Matrix zu berechnen.

d) Gegeben sei folgendende s.p.d. Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   i) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $\mathcal{A} = LL^\top$.

   ii) Berechnen Sie die Determinante $\det \mathcal{A}$.

1+1+1+4 Punkte

Aufgabe 14.

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Kondition $\mathrm{cond}_\infty A$ bezüglich der Zeilensummennorm.

b) Bestimmen Sie die Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die sich aus $C = D^{-1}A$ ergibt, wobei $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}, D = \mathrm{diag}(d_1, d_2)$ mit $d_i = \sum_{j=1}^{2} |a_{i,j}|,\ i = 1, 2.$

c) Bestimmen Sie nun die Kondition $\mathrm{cond}_\infty C$ bezüglich der Zeilensummennorm.

3+1+3 Punkte

Aufgabe 15.

Betrachten Sie die Abbildung f, gegeben durch

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie, ob die Abbildung injektiv ist.

b) Bestimmen Sie eine Näherung für eine Nullstelle von f. Führen Sie dazu *einen* Schritt des Newton Verfahrens mit dem Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

aus.

1+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Viel Erfolg!