Prof. Dr. Benjamin Stamm

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2018/19
Klausur | 05.03.2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 20.03.2019 von 15:00–16:30 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
Punkte	10	7	8	9	9	7	4	8	9	12	6	5	94
Ihre Punkte													

Klausur ☐ + Bonus ☐ = Gesamt ☐

Note: ☐

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-2	0	2
f_i	-1	0	2

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ unter Verwendung der Newtonschen Interpolationsformel.

b) Werten Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit dem Neville-Aitken-Schema bei $x = 1$ aus.

5+5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Benutzen Sie Interpolation mit einem linearen Polynom, um die Gewichte in der interpolatorischen Quadraturformel

$$Q\left[\int_{-1}^{1} f(x)dx\right] = \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$$

mit $x_1 = -0.5$ und $x_2 = 0.5$ zu bestimmen. Welchen Genauigkeitsgrad hat diese Quadraturformel?

b) Welchen Genauigkeitsgrad hätte eine Gauss-Quadratur mit 2 Stützstellen?

6+1 Punkte

Aufgabe 3.

(a) Schätzen Sie ab, wie viele Stützstellen in der summierten Trapezregel bei Anwendung auf das Integral

$$\int_0^\pi \cos(x^2)dx$$

mindestens nötig sind, um es bis auf einen Fehler von $\leq 10^{-5}$ anzunähern.

(b) Für $x \in [-1, 1]$ ist das Tschebyscheff-Polynom n-ten Grades gegeben durch $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Geben Sie die Nullstellen von T_n an und benennen Sie die Anzahl Extrema. Begründen Sie Ihre Antworten.

5+3 Punkte

Aufgabe 4.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2c+4 \\ 2 & 2c+4 & 5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist A symmetrisch positiv definit.

b) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung von A?

c) Lösen Sie für $c = 0$ das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung.

4+2+3 Punkte

Aufgabe 5.
Sei $f(x) = -x^3/6 + x/2 + c$ fuer beliebiges $c \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die ersten Schritte des Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 0$ mit $c = -1/2$. Was beobachten Sie

(b) Berechnen Sie die ersten zwei Schritte des Newton-Verfahrens für den Startwert $x_0 = 0$ mit $c = -1/4$.

5+4 Punkte

Aufgabe 6.

Gegeben sei eine Tabelle von Messwerten:

i	1	2	3	4
t_i	1	2	3	4
y_i	0	0	1	2

Zur Approximation der Messwerte (t_i, y_i) nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate soll der Ansatz $x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ verwendet werden.

a) Bestimmen Sie die Matrix A des linearen Ausgleichsproblems.

b) Stellen Sie das Normalgleichungssystem auf und lösen Sie es mit einem geeignetem Verfahren.

c) Skizzieren Sie die Lösung.

d) Berechnen Sie die 2-Norm des Residuums $r = y - Ax$.

1+3+1+2 Punkte

Aufgabe 7.

Sei $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(t, x) = t^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{4t}\right)$$

($\| \cdot \|_2 =$ euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$).
Zeigen Sie, fuer $n = 3$ dass f eine Lösung der *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

ist.

Hinweis: Es bezeichnet Δ den Laplace-Operator, d.h. $\Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.

4 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + z &= 1, \\ 2y + 2z &= 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass in einer Umgebung von $x = 0$ eindeutige Funktionen $y = y(x)$ und $z = z(x)$ existieren, sodass $(x, y(x), z(x))$ das obige Gleichungssystem löst und $y(x) > 0$ ist. Berechnen Sie ausserdem $y'(0), z'(0)$.

8 Punkte

Aufgabe 9.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y) = -\cos(x^2 + y^2 + x^3).$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2 f$ im Punkt $(x, y) = (0, 0)$.

b) Bestimmen Sie das Maximum von f und $T_2 f$ im geschlossenen Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$.

Hinweis: Sie duerfen annehmen, dass $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ist, d.h. sie ist zweimal stetig differenzierbar.

6+3 Punkte

Aufgabe 10.
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_\alpha(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha.$$

Untersuchen Sie fuer welche Werte von α und an welchen Stellen (x, y) die Funktion $f_\alpha(x, y)$ stetig, differenzierbar und zweimal differenzierbar ist.

12 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 11.

Gegeben sei die DGL

$$y'(x) = \frac{x}{2(y+1)^3}.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung in $\mathbb{R}$ und damit die Lösung zum Anfangswert $y(1) = 0$.

Hinweis: Nutzen Sie die Substitution $u = (y+1)^2$.

6 Punkte

Aufgabe 12.

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems zweiter Ordnung:

$$u''(t) + 4u(t) = 2t^2 - 1, \qquad u(0) = u'(0) = 0.$$

Hinweis: Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $u_s(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$.

Hinweis: Zur Bestimmung der homogenen Lösung kann der Exponentialansatz $ce^{\alpha t}$ verwendet werden.

Hinweis: $\frac{1}{2}[\exp(ix) + \exp(-ix)] = \cos(x)$.

5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: