Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Prof. Dr. Sebastian Noelle

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2017
Klausur | 08.03.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 19.03.2018 von 10:00–11:30 Uhr im Hörsaal E1 (1090|301) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	4	3	5	4	3	5	2	3	2	4	3	4	3	4	5	54
Ihre Punkte																

Klausur [ ] + Bonus [ ] = Gesamt [ ]

Note: [ ]

Aufgabe 1.

Gegeben seien die Daten (x_i, y_i) für $i = 0, \ldots, 2$.

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	5	0	-10

a) Geben Sie das Newton'sche Interpolationspolynom $p_2(x)$ an, welches die Daten interpoliert.

b) Geben Sie den maximalen Fehler bei einer Auswertung im Intervall $[0, 3]$ an.

c) Geben sie den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 2$ an.

1,5+1,5+1 Punkt(e)

Aufgabe 2.

Entwickeln Sie eine Quadraturformel für das Intervall $[-1, 1]$ mit 2 Stützstellen x_0, x_1, wobei $x_1 = 1$ vorgegeben ist:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(1).$$

Bestimmen Sie c_0, c_1, x_0 so, dass der Exaktheitsgrad möglichst groß wird.

3 Punkte

Aufgabe 3.

Es sei $Q(h)$ eine summierte Quadraturformel, für die die Fehler-Entwicklung

$$Q(h) = \int_a^b f(x)\,dx + c_0 h^2 + c_1 h^5$$

gilt. Hierbei sind $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten die nur von der Funktion f abhängen und nicht von h. Für die Schrittweite gelte $h \leq 1/2$.

(a) Gegeben seien die Auswertungen $Q(h)$ und $Q\left(\frac{h}{2}\right)$. Kombinieren Sie die Auswertungen mit Hilfe der Fehler-Entwicklung so, daß Sie eine genauere Approximation $\tilde{Q}(h)$ an das Integral bekommen.

(b) Bestimmen Sie den Fehler von $\tilde{Q}(h)$ in (a) in der Form $\|\tilde{Q}(h) - \int_a^b f(x)\,dx\| = Ch^q$ und geben Sie C und q in Abhängigkeit von c_1 an.

4+1 Punkt(e)

Aufgabe 4.

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 4 & t & -8 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

und der rechten Seite

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A in Abhängigkeit von t und geben Sie die Lösung für x an.

b) Für welches t müssen Sie eine Vertauschung von zwei Zeilen durchführen?

c) Geben Sie die entsprechende Permutationsmatrix P an und berechnen Sie für dieses t die LR-Zerlegung von PA sowie die Lösung für x

1.5+0.5+2 Punkte

Aufgabe 5.

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon^2 \end{pmatrix}$ mit $0 < \epsilon \ll 1$.

a) Berechnen Sie die Konditionszahl von A in der 1-Norm.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler der Lösung von $Ax = b$ an, falls b gestört wird mit

$$||\Delta b|| \leq \epsilon ||b||.$$

c) Was muss $||\Delta b||$ erfüllen, damit $Ax = b$ auch für $\epsilon \to 0$ stabil gelöst werden kann?

1+1+1 Punkt(e)

Aufgabe 6.
Sei $f \in C^{m+1}$, $m > 1$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}$ eine m-fache Nullstelle von f, d.h.

$$f^{(j)}(\bar{x}) = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1; \quad f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0.$$

Zeigen Sie:

a) Das Newton-Verfahren konvergiert nur von 1. Ordnung

b) Das modifizierte Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

konvergiert quadratisch.

c) Die Funktion $g(x) := \frac{f(x)}{f'(x)}$ hat eine einfache Nullstelle in $\bar{x}$.

2+1+2 Punkt(e)

Aufgabe 7.

Führen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi y) \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch.

2 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter α, β und γ sollen so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

i	1	2	3	4
t_i	1	2	3	4
$f(t_i)$	1	2	2	3

möglichst gut approximiert wird.

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf und lösen Sie sie mit einem geeigneten Verfahren.

c) Skizzieren Sie die Lösung inkl. der Messwerte.

1+1+1 Punkt(e)

Aufgabe 9.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = QR$ gilt.

2 Punkte

Aufgabe 10.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Ist f stetig in $(0,0)$?

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f. Ist f partiell differenzierbar in $(0,0)$?

(c) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

1.5+1.5+1 Punkt(e)

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 11.

a) Sei die Funktion $f : (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (\sin x)^{\cos y}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ im Punkt $(\frac{\pi}{4}, 0)$.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = y \cdot \mathrm{e}^{x+2z} + z \cdot \mathrm{e}^{-y},$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2+1 Punkt(e)

Aufgabe 12.
Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x, y) = xy^2 \text{ unter der Nebenbedingung } x + y = 1;$$

a) durch Einsetzen der Nebenbedingung

b) mit Hilfe der Lagrangefunktion. Begründen Sie, ob es sich um lokale oder globale Extrema handelt.

1.5+2.5 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0,$$

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$$

Zeigen Sie, dass in der Umgebung von $x = 0$ positive Funktionen $y = y(x)$ und $z = z(x)$ existieren, sodass $(x, y(x), z(x))$ das obige Gleichungssystem löst.
Berechnen Sie weiterhin $(y'(0), z'(0))$ bzw. $y'(0)$ und $z'(0)$.

3 Punkte

Aufgabe 14.

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = x^2 y(x) + x^2, \qquad y(0) = 2.$$

Nehmen Sie an, dass $y(x) > -1$ gilt.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung über Separation der Variablen.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung über Variation der Konstanten.

2+2 Punkte

Aufgabe 15.
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Gegeben sei das AWP

$$y' = 2xy \quad \text{in } [a, b] \times \mathbb{R}, \quad y(0) = c. \tag{1}$$

a) Begründen Sie, dass die Voraussetzungen der Picard-Lindelöf Iteration erfüllt sind und dass eine eindeutige Lösung des Problems (1) existiert.

b) Berechnen Sie explizit die ersten drei Picard-Lindelöf Iterationen y_0, y_1, y_2 des Problems (1).

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die n-te Picard-Lindelöf Iteration y_n des Problems (1) gilt:

$$y_n(x) = c \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}, \qquad x \in [a, b].$$

Bestimmen Sie den punktweisen Limes der Picard-Lindelöf Iterationsfolge (y_n). Löst dieser Limes das Problem (1)?

1+2+2 Punkt(e)