Prof. Dr. Benjamin Stamm
Prof. Dr. Martin Grepl

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2016/17
Klausur | 17.03.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 30.03.2017 von 14:00–15:00 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
Punkte	4,5	12	4,5	5	5	4	3,5	4	9	5,5	6	5	5	5	78
Ihre Punkte															

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y) + (1 + x - y^2)^2.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f)$ von f an der Stelle $(0, 0)$.

4,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 2.

a) Sei $f(x,y) = \left(1 - x^2 - y^2\right)^2$. Bestimmen Sie die Extremalstelle(n) der Funktion f und stellen Sie (jeweils) fest ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

b) Erstellen Sie eine 2D-Iso-Linien-Skizze der Lösung für die Aufgabe a).

c) Nun seien $f(x,y) = x^2 + y^2$ und die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1\}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x,y) \in M$.

d) Bestimmen Sie anhand der Ergebnisse aus c) und mit Hilfe einer 2D-Skizze die Lösung der Aufgabe

$$\min_{(x,y)\in M} f(x,y).$$

4+1+5,5+1,5 Punkte

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\sin(x^2 + y^2) \cdot (x^2 + y^2) = 0$$

im Punkt $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Auflösung im Punkt $x = \sqrt{\pi}$.

c) Ist die Gleichung im Punkt $(\sqrt{\pi}, 0)$ nach y auflösbar?

2,5+1+1 Punkte

Aufgabe 4.

a) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x^3 y''(x) - 2y'(x) + \sin(x)y(x) = 0.$$

Ist diese Differentialgleichung für y als Funktion von x linear oder nichtlinear? Ist diese Differentialgleichung autonom oder nicht?

b) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = (y(x) - x)^2 + 1.$$

Finden Sie die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

c) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) + \cos(x)y(x) = xe^{-\sin(x)}.$$

Finden Sie die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

1+1,5+2,5 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -2u_2(t),\\ u_2'(t) &= -2u_1(t),\\ u_3'(t) &= -\frac{7}{2}u_1(t) - \frac{7}{2}u_2(t) + 5u_3(t), \end{aligned}$$

a) Formulieren Sie dieses DGL-System als lineares System erster Ordnung der Form

$$y'(t) = Ay(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, y\colon I \to \mathbb{R}.$$

b) Finden Sie das Fundamentalsystem zur diese ODE $y'(t) = Ay(t)$.

c) Bestimmen Sie die Lösung für die Aufangswerte

$$u_1(0) = 1, \qquad u_2(0) = 1, \qquad u_3(0) = 1.$$

1+2+2 Punkte

Aufgabe 6.
Seien die Funtionen

$$\begin{aligned} g(r,\theta) &= (r\cos\theta, r\sin\theta)\,, \qquad \forall r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}, \\ h(x,y) &= (x^2+y^2)x \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}, \\ f(x,y) &= \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{falls} x \neq 0 \text{oder} y \neq 0 \\ 0 & \text{falls} x = y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $Dg(r,\theta)$ von g.

b) Bestimmen Sie die Verknüpfung $h \circ g$ und bestimmen Sie die Ableitung von $h \circ g$ anhand der Kettenregel.

c) Auf welcher Untermenge von $\{(r,\theta)\colon r \geq 0, \theta \in [0,2\pi]\}$ ist die Funktion $f \circ g$ nicht stetig?

1+2+1 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 7.

Gegegen sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zur Lösung des Gleichungssystems stehen Ihnen Approximationen von A und b zur Verfügung, die mit einem absoluten Fehler von $\frac{1}{20}$ in jedem Eintrag behaftet sind. Mit welchem relativen Fehler der Lösung des gestörten linearen Gleichungssystems – gemessen in der $||\cdot||_\infty$-Norm – müssen Sie rechnen?

Hinweis:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 5/2 & -1 \end{pmatrix}$$

3,5 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 8.

(a) Gegeben sei die Menge der Maschinenzahlen $\mathbb{M}(2, 23, -127, 127)$ in normalisierter Gleitpunktdarstellung (Basis $b = 2$, Mantissenlänge $m = 23$ und Exponent $-127 \leq e \leq 127$) mit relativer Maschinengenauigkeit $eps = \frac{b^{1-m}}{2}$.

(i) Geben Sie jeweils die beiden betragsmäßig nächstgrößten Maschinenzahlen nach den Zahlen 1 und 2 an, die sich darstellen lassen.

(ii) Erklären Sie, was in diesem Zusammenhang als **underflow** und als **overflow** bezeichnet wird.

(b) Sei $M = \mathbb{M}(3, 2, -5, 5)$ die Menge der Maschinenzahlen mit Basis 3, Mantissenlänge 2, und Exponenten $-5 \leq e \leq 5$. Bestimmen Sie den größten Wert in M der kleiner als $1/2$ ist, sowie den kleinsten Wert der größer als $1/2$ ist. Geben Sie die Werte in der Basis 3 an.

3+1 Punkte

Aufgabe 9.
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -10 & -5 \\ -10 & 28 & -10 \\ -5 & -10 & 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Überprüfen Sie, ob die Matrix A s.p.d. ist.

b) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an.

c) Lösen Sie mit Hilfe der LDL^T-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. (Lösungen über eine LR-Zerlegung ergeben keine Punkte.)

d) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der in b) gefundenen LDL^T-Zerlegung.

e) Wäre das Problem auch über eine LR-Zerlegung ohne Pivotisierung lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

f) Welche Variante ist vorzuziehen und warum?

1+3+2,5+1+0,5+1 Punkte

Aufgabe 10.

Gegeben seien Meßwerte

i	1	2	3	4
t_i	0	1	2	4
$f(t_i)$	4	2.5	2.5	7

die zu dem Bildungsgesetz

$$f^{Modell}(t) := \frac{\alpha}{t+1} + \beta(t-1)^2 + t$$

gehören.

(a) Ihre Aufgabe ist die Bestimmung von α und β mit Hilfe der linearen Ausgleichsrechnung. Formulieren Sie das zugehörige Ausgleichsproblem.

(b) Gegeben sei nun das lineare Ausgleichsproblem mit Matrix A und rechter Seite b gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 0 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}^2$ so, dass $||Ax-b||_2$ minimal ist. Verwenden Sie dazu die Normalengleichung. Bestimmen Sie das Residuum und geben Sie die Norm des Residuum an.

2,5+3 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}, \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 7 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \text{ und } b := \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von A über Givensrotationen. Die Matrix Q muss dabei nicht explizit angegeben werden.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die QR-Zerlegung aus Teil a).

c) Bestimmen Sie den Residuumsvektor sowie dessen 2-Norm.

d) Geben Sie den orthogonalen Projektionspunkt p von b auf $\text{Bild}(A)$ an. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen p und dem Residuumsvektor. Bestätigen Sie diesen Zusammenhang für Ihre Ergebnisse.

2,5+1+1+1,5 Punkte

Aufgabe 12.

Gesucht ist eine näherungsweise Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^3 + e^y &= -z^2, \\ -xy &= -\frac{1}{3}z^3, \\ -yx^3 + 6 &= -z(8 + x^3). \end{aligned}$$

a) Überführen Sie das oben gegebene nichtlineare Gleichungssystem in ein äquivalentes Nullstellenproblem.

b) Wenden Sie einen Iterationsschritt des Newton-Verfahrens zum Startwert $(1, 0, -1)^T$ auf das in Teil a) bestimmte Nullstellenproblem an.

1+4 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Aufgabe 13.
Die Funktion $f(x)$ soll interpoliert werden. Gegeben sind folgende Messwerte

i	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	5	-2	15

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $P(f|1,2,3,4)(x)$ mit Hilfe des Newton-Schemas. Geben Sie das Polynom in einer hornerartigen Form an.

b) Ist es möglich, dass $\max_{x\in[0,4]} |f''(x)| < 10$ ist?

c) Bestimmen Sie den Wert von $P(f|1,3,4)(2)$ mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas. (Beachten Sie, dass hier nur drei von vier Stützstellen benutzt werden.)

d) Schätzen Sie den Fehler $|P(f|1,3,4)(2) - f(2)|$ möglichst gut ab, ohne den in der Tabelle gegebenen Wert von $f(2)$ zu benutzen. Sie können davon ausgehen, dass

$$\max_{x\in[1,4]} |f^{(3)}(x)| \leq 36$$

gilt.

2+0,5+1,5+1 Punkte

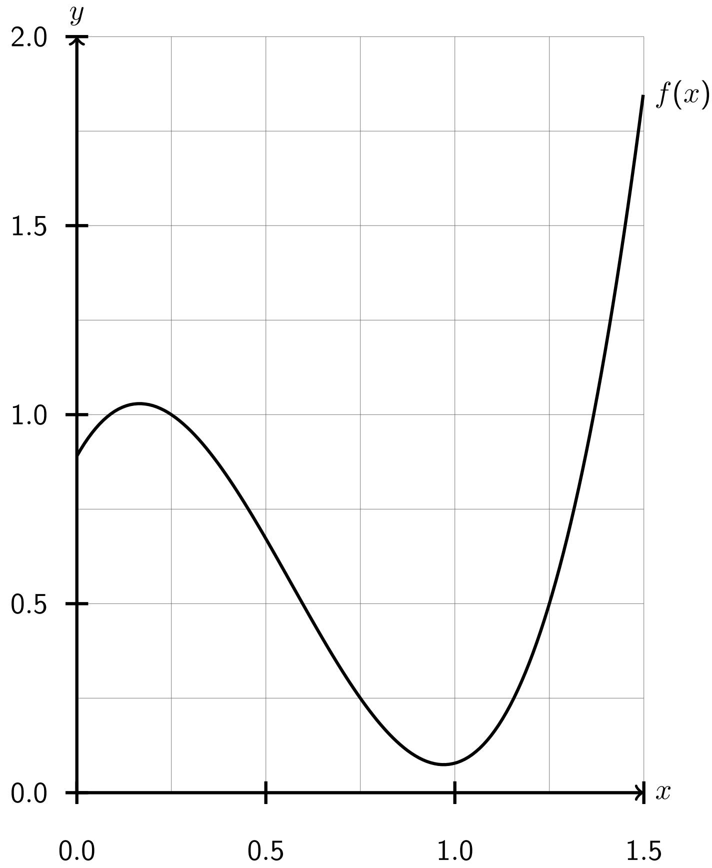
Aufgabe 14.

Gesucht ist eine Näherungslösung für das Integral

$$\int_0^{1.5} f(x)dx.$$

Hierfür soll die summierte Mittelpunktsregel benutzt werden.

(a) Skizzieren Sie die Rechtecke, die sich für eine Unterteilung des Intervalls $[0, 1.5]$ in drei gleichgroße Teilintervalle ergeben, in folgendem Diagramm:



Bestimmen Sie dann den näherungsweisen Wert des Integrals, indem Sie die Flächen der Rechtecke berechnen und summieren.

(b) Schätzen Sie den Fehler für die in Teil (a) benutzte summierte Mittelpunktsregel ab.

Hinweis: Für die Ableitungen des Integranden $f(x)$ auf dem Intervall $[0, 1.5]$ gilt: $|f^{(1)}(x)| \leq 6$, $|f^{(2)}(x)| \leq 18$, $|f^{(3)}(x)| \leq 22$.

3+2 Punkte

Name: Matrikel-Nr.:

Name: Matrikel-Nr.:

Prof. Dr. Benjamin Stamm
Prof. Dr. Martin Grepl

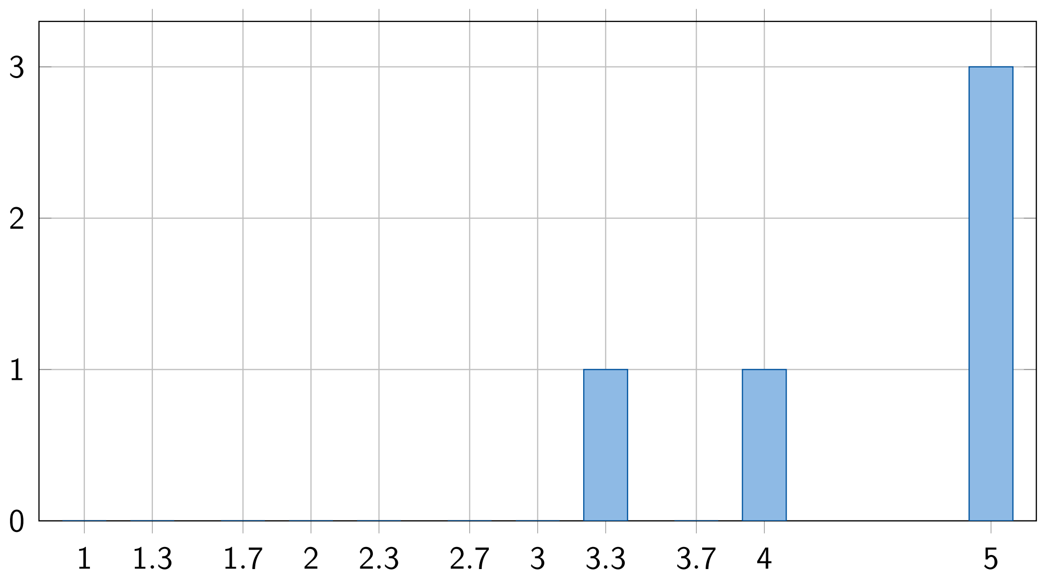
Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2016/17
Klausur am 17.03.2017 | Übersicht Klausuraufgaben

Prof. Dr. Benjamin Stamm
Prof. Dr. Martin Grepl

Mathematische Grundlagen II (CES) | WS 2016/17
Klausur am 17.03.2017 | Notenskala und Statistik

Note	Punkte	Statistik
1.0	95 – 100	0
1.3	90 – 94.5	0
1.7	85 – 89.5	0
2.0	80 – 84.5	0
2.3	75 – 79.5	0
2.7	70 – 74.5	0
3.0	65 – 69.5	0
3.3	60 – 64.5	1
3.7	55 – 59.5	0
4.0	50 – 54.5	1
5.0	0 – 49.5	3

Notenskala



Notenstatistik