Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Mathematische Grundlagen II (CES)

14.03.2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Zwei eigenhändig und beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, die mit Namen und Matrikelnummer versehen sind.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **180 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte (ohne Bonuspunkte). Die Bonuspunkte werden nur bei Erreichen der Bestehensgrenze angerechnet.
- Die Klausureinsicht findet am 21.03.2014 von 10:15–11:45 Uhr im Seminarraum 328 (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Ein Termin für eine mündliche Nachprüfung ist dort zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt" an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Bei Rücktritt von der Klausur *vor* Beginn der Klausur ist ein Attest notwendig. Bei Rücktritt *nach* Beginn der Klausur ist unverzüglich eine Ärztin oder ein Arzt aufzusuchen. Auf dem Attest müssen Befundtatsachen, Datum und genaue Uhrzeit aufgeführt werden. Das Attest ist unverzüglich beim zentralen Prüfungsamt (ZPA) einzureichen. Nach Weiterleitung an den zuständigen Prüfungsausschuss entscheidet dieser über die Anerkennung.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

NAME, VORNAME: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
Punkte	6	4,5	6	12,5	6	3,5	8	7	10,5	6	8	5,5	6	3,5	7	100
Ihre Punkte																

Klausur (%) ☐ + Bonus (%) ☐ = Gesamt (%) ☐

Note: ☐

Klausur Mathematische Grundlagen II (CES)

14.03.2014

Aufgabe 1.

Berechnen Sie die absolute und die relative Kondition des Problems $x \mapsto f(x)$ für die Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_1^2 + x_2)\cos(x_1 x_2) \\ x_1 + e^{x_1^2}\sin(x_2) \\ e^{x_1^2}(1 + x_1^2 + x_1 x_2) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm im Punkt $x_0 = (1, 0)$.

6 Punkte

Aufgabe 2.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (x - \frac{2}{\pi}y)^3 + \sin(x + y).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f)$ von f an der Stelle $(0, \frac{\pi}{2})$.

4.5 Punkte

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine LR-Zerlegung von A an, wobei L eine unipotente untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

b) Berechnen Sie die Kondition der Matrix bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$- und $\|\cdot\|_1$-Norm.

3+3 Punkte

Aufgabe 4.

a) Sei $f(x, y) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}y^2 - \frac{7}{2}xy$. Bestimmen Sie die Extremalstelle(n) der Funktion f und stellen Sie (jeweils) fest ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

b) Nun seien $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ und die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = -\frac{3}{2}\}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x, y) \in M$.

c) Bestimmen Sie anhand der Ergebnisse aus b) und mit Hilfe einer Skizze die Lösung der Aufgabe

$$\min_{(x,y)\in M} f(x, y).$$

5+5.5+2 Punkte

Aufgabe 5.

Es wurde festgestellt, dass sich in einem Experiment die Größen s und p wie folgt zueinander verhalten:

s	16	6	10	19	3
p	9	3	8	7	2

Es soll das Modell $p = x \cdot s$ untersucht werden.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem.

b) Ermitteln Sie den Parameter x mittels Normalengleichung.

c) Bestimmen Sie die $\|\cdot\|_2$-Norm des Residuums.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 6.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$ye^y + y^2 + e^x = 1$$

im Punkt $(0, 0)$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Auflösung im Punkt $x = 0$.

2.5+1 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{90}(1 + x)e^{x^2+1} + \frac{1}{2}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f die Vorraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt.

b) Wie viele Iterationen der Fixpunktiterationen $x_{k+1} = \phi(x_k)$ sind notwendig, um den Fixpunkt x^* bis auf 10^{-8} genau zu approximieren? Der Startwert sei dabei $x_0 = -1$ und man soll zur Beantwortung der Frage höchstens eine Iteration durchführen. Begründen Sie Ihre Antwort.

5+3 Punkte

Aufgabe 8.

Das folgende Integral soll näherungsweise berechnet werden:

$$\int_0^2 2x \sin(\pi x) \, \mathrm{dx}.$$

a) Benutzen Sie dazu die summierte Trapezregel, wobei das Intervall in 4 Teile geteilt werden soll.

b) Schätzen Sie, wieviele Stützstellen in der summierten Trapezregel nötig sind, um bei der Berechnung des obigen Integrals einen Fehler $\leqslant 10^{-3}$ zu erreichen.

4+3 Punkte

Aufgabe 9.

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme

a) $y''' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 9$

b) $y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 2.$

5+5.5 Punkte

Aufgabe 10.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie mittels Householder-Spiegelung einen Schritt für die QR-Zerlegung der Matrix A durch und geben Sie die Matrizen $Q^{(1)}$ und $R^{(1)}$ explizit an.

6 Punkte

Aufgabe 11.

Gegeben ist die Werte-Tabelle für eine Funktion $y = f(x)$

i	0	1	2	3
x_i	-3	1	2	3
y_i	2	1	-1	0

a) Finden Sie eine Approximation für $f(0)$ durch Interpolation mit Hilfe des Neville-Aitken Schemas für die ersten drei Punkte (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2$.

b) Geben Sie das Lagrange-Interpolationspolynom $y = p(x)$ zu den Daten (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, 3$ an.

c) Wie lautet der Interpolationsfehler in (b)?

4+2+2 Punkte

Aufgabe 12.

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{\sin(x)}{y} \quad \text{für} \quad y \neq 0.$$

Zeigen Sie, daß diese Funktion keine stetige Erweiterung auf $\mathbb{R}^2$ besitzt.

b) Sei $f_n(x) = \frac{n\cos(n^2 x)}{n^2 + x}$, $n = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{gleichmäßig auf} \quad \mathbb{R}^+.$$

2.5+3 Punkte

Aufgabe 13.

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & 1 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Lösen Sie unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$.

b) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

3+3 Punkte

Aufgabe 14.

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x, y) = (y^2 x, e^x, e^{xy}), \quad g(x, y, z) = x^2 + yz.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $Df(x, y)$ und $\nabla g(x, y, z)$.

b) Bestimmen Sie $D(g \circ f)(0, 0)$ mit Hilfe der Kettenregel.

2.5+1 Punkte

Aufgabe 15.

Anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ werde das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst. Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{100} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

in der Maximumnorm an, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

7 Punkte