Aufgabe 1.

Berechnen Sie die absolute und die relative Kondition des Problems $x \mapsto f(x)$ für die Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + e^{x_2^2} \sin(x_3) \\ e^{x_1}(1 + x_1^2 + x_2 x_3) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm im Punkt $x_0 = (1, 1, \frac{\pi}{2})$.

4 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 8 & 8 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine LR-Zerlegung von A an, wobei L eine unipotente untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

b) Berechnen Sie die Kondition der Matrix bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$- und $\|\cdot\|_1$-Norm.

1+1 Punkte

Aufgabe 3.

Bei einem Experiment wurde festgestellt, dass sich a: "Anzahl der Partikel von Typ A" zu b: "Anzahl der Moleküle von Typ B" wie folgt verhält:

a	3	6	10	16	29
b	2	3	8	9	7

Es soll das Modell $b = a \cdot t$ untersucht werden.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem.

b) Ermitteln Sie den Parameter t mittels Normalengleichung.

c) Bestimmen Sie die $\|\cdot\|_2$-Norm des Residuums.

1+1+1 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{2}sin(x) + \frac{1}{20}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f die Vorraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt.

(b) Angenommen der Fixpunkt x^* von f in $[-1, 1]$ soll nun per Fixpunktiteration vom Startwert $x_0 = 0$ aus berechnet werden. Geben Sie eine Abschätzung für die Anzahl der Schritte an, die erforderlich sind um x^* bis auf einen vorgegebenen Fehler von $\epsilon > 0$ zu bestimmen.

2,5+1,5 Punkte

Aufgabe 5.

Führen Sie ausgehend von den Startwerten

$$x_1^{(0)} = 1, \quad x_2^{(0)} = 1,$$

einen Schritt des Newton-Verfahrens zwecks Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2 + 8x_2^3 &= 6x_1^2 \\ 2x_1^3 + 1 &= 3x_2^2 \end{aligned}$$

aus.

2 Punkte

Aufgabe 6.

Führen Sie mittels Householder-Transformationen eine vollständige QR-Zerlegung für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 + 3\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

durch.

2 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie Rang(A), Kern(A) und Bild(A). Ist A invertierbar? Geben Sie zwei verschiedene rechte Seiten b_1, b_2 an, so dass die Gleichung $Ax = b_i$ einmal lösbar und einmal nicht lösbar ist.

b) Geben Sie eine allgemeine Gleichung für Rang(M), $\dim$ Kern(M) und n für eine beliebige reelle $n \times n$-Matrix M an. Verifizieren Sie diese Gleichung für A.

c) Zeigen Sie dass Bild(A) $\subset$ Ker(A), d.h. für alle $x \in$ Bild(A) gilt auch $x \in$ Ker(A). Leiten sie damit $A^2 = 0$ her.

2+0,5+1 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben seien folgende Matrizen, wobei $a, b \in \mathbb{R}$:

a)

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils die Determinante von A und geben Sie an, wann die Matrix regulär bzw. singulär ist.

1+1 Punkte

Aufgabe 9.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die drei paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A mit $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ sowie den Eigenraum zum Eigenwert λ_1.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen sie Ihre Antwort.

(c) Ist A positiv definit? Zeigen sie dass A invertierbar ist und geben Sie die Eigenwerte von A^{-1} an.

2+0,5+0,5 Punkte

Aufgabe 10.

Sei f eine Abbildung von $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(a) Zeigen Sie:
Für alle $(x,y) \in A$ gilt

$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2,$$

wobei $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Geben Sie weiterhin die stetige Fortsetzung von f in den Punkt $(0,0)$ an.
Hinweis: Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

(b) Geben Sie den Gradient an.

(c) Berechnen Sie die Taylorentwicklung erster Ordnung um den Punkt (1,1)

(d) Was ist die Richtungsableitung bei (1,1) in Richtung (-1,1)?

2,5+1+1+1 Punkte

Aufgabe 11.

Wir betrachten das Gleichungensystem

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 & = & 1, \\ xyz & = & 1. \end{cases}$$

(a) Sei (x_0, y_0, z_0) eine Lösung von $(\mathcal{P})$. Zeigen sie, dass $(\mathcal{P})$ in der Nähe von $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ eindeutig nach (y, z) auflösbar ist, d.h. es gibt ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und zwei Funktionen $z(x), y(x)$ die $(\mathcal{P})$ für alle $x \in I$ lösen.

(b) Bestimmen Sie $z'(x_0)$ und $y'(x_0)$.

2+1 Punkte

Aufgabe 12.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x^2 + \frac{5}{4}y^2 - xy$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(c) Was sind die globalen Maxima und Minima von f auf der Kreisscheibe $K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\big\}$?

1+2+1 Punkte

Aufgabe 13.

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems zweiter Ordnung:

$$u''(t) + 9u(t) = 2t^2 - 1, \qquad u(0) = u'(0) = 0.$$

Hinweis: Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung findet sich durch den Ansatz $u_s(t) = \alpha t^2 + \beta$.
Hinweis: $\exp(ix) + \exp(-ix) = \frac{1}{2}\cos(x)$.

4 Punkte

Aufgabe 14.

Gegeben sind eine Matrix A und ein Vektor y_0 mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -6 \\ -8 & -8 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad y_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A die folgende Form hat:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 8\lambda^2 + 48\lambda,$$

und berechnen Sie die Eigenwerte.

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für $y(t)$:

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0.$$

(c) Gibt es eine Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = (1,1,1)^T$ für die gilt $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$?.

1+2+1 Punkte

Aufgabe 15.

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = e^{y(t)} \cos t, \qquad y(0) = y_0$$

lokal um $(0, y_0)$ eine eindeutige Lösung besitzt und berechnen Sie diese.

(b) Für welche Anfangswerte y_0 existiert die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$?

3+1 Punkte