**Aufgabe 1.** Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & -2a & -2-3a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem auf Treppenform.

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem eindeutig, mehrdeutig oder gar nicht lösbar?

(c) Geben Sie die Lösung für $a = 1$, $b = 1$ an.

1,5+1,5+1 Punkte

**Aufgabe 2.** Gegeben seien folgende Matrizen, wobei $a, b \in \mathbb{R}$:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils die Determinante von $A$ und geben Sie an, wann die Matrix regulär bzw. singulär ist. 1+1 Punkte

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

Ist diese Matrix diagonalisierbar?

3 Punkte

**Aufgabe 4.** (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion

$$f(x,y) = \sin(\sqrt{xy}).$$

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix für Werte $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) Berechnen Sie die Taylorentwicklung erster Ordnung um den Punkt $(x,y) = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$.

(d) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f$ im Punkt $(x,y) = (\pi,\pi)$ in Richtung $n = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

0,5+2+1+1 Punkte

**Aufgabe 5.** Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(P)\quad \begin{cases} y\cos(x+y+z) & = 0 \\ x^3 + y - z & = 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(P)$ lokal um $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ eindeutig nach $(y, z)$ auflösbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(P)$ in einer Umgebung von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ <u>nicht</u> nach $(x, y)$ auflösbar ist.

(c) Bestimmen Sie $y'(0)$ für den Fall in (a).

2+1+1 Punkte

**Aufgabe 6.** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 2x + 3y + 4z$. Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f$ in der Kugel $K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\right\}$.

4 Punkte

**Aufgabe 7.** Geben Sie jeweils die vollständige explizite Lösung $y(x)$ der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen an:

(a) $y' = -\dfrac{1+y^2}{x \cdot y}$ mit $x \neq 0$,

(b) $y' - \dfrac{4}{x} \cdot y = x^3$ mit $x \neq 0$.

2 + 1,5 Punkte

**Aufgabe 8.** Gegeben sind eine Matrix $A$ und ein Vektor $y_0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -6 \\ -8 & -8 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad y_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von $A$ die folgende Form hat:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 8\lambda^2 + 48\lambda,$$

und berechnen Sie die Eigenwerte.

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für $y(t)$:

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0.$$

(c) Gibt es eine Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = (1, 1, 1)^T$ für die gilt $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$?.

1+2,5+1 Punkte

**Aufgabe 9.** Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = t^2 - 3(y(t) - 1).$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(t, y) = t^2 - 3(y - 1),$$

Lipschitz-stetig bezüglich $y$ ist.

(b) Führen Sie zwei Schritte der Picard-Iteration durch für das Anfangswertproblem mit $y(0) = 1$.

1+1 Punkte

**Aufgabe 10.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine LR-Zerlegung von $A$ an, wobei $L$ eine unipotente untere Dreiecksmatrix und $R$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Berechnen Sie die Kondition der Matrix bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$- und $\|\cdot\|_1$-Norm.

2+2 Punkte

**Aufgabe 11.** Berechnen Sie die absolute und relative Kondition des Problems $x \mapsto f(x)$ für die Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{x_1} \sin(x_2) \\ e^{x_2} \cos(x_1) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

bzgl. der $\| \cdot \|_\infty$-Norm im Punkt $(0, \pi) = x_0$.

2 Punkte

**Aufgabe 12.** Bei einem Experiment ergaben sich die folgende Messwerte:

| $x$ | 0 | 0 | 2 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 0 | 4 | 8 | 20 | 16 |

Es soll das Modell $f = \frac{a}{2} \cdot x^2$ untersucht werden.

(a) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem.

(b) Ermitteln Sie den Parameter $a$ mittels Normalengleichung.

(c) Bestimmen Sie die $\|\cdot\|_2$-Norm des Residuums.

1+1+1 Punkte

**Aufgabe 13.** Gegeben sei ein Gleichungssystem der Art

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$r, b \in R^m, \;\; x \in R^n, \;\; A \in R^{m \times n} \;\; \text{und} \;\; I \in R^{m \times m}.$$

(a) Zeigen Sie: $x$ ist Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|b - Ax\|_2 \longrightarrow \min$ und $r$ das dazugehörige Residuum.

(b) Gegeben sei nun eine $QR$-Zerlegung der Matrix $A$. Benutzen Sie diese Zerlegung zur Lösung des obigen Gleichungssystems.

1,5+1,5 Punkte

**Aufgabe 14.** Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\sin(x) + x^3\right) + \frac{1}{10}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ die Vorraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt.

(b) Angenommen der Fixpunkt $x^*$ von $f$ in $[-1, 1]$ soll nun per Fixpunktiteration vom Startwert $x_0 = 0$ aus berechnet werden. Geben Sie eine Abschätzung für die Anzahl der Schritte an, die erforderlich sind um $x^*$ bis auf einen vorgegebenen Fehler von $\epsilon > 0$ zu bestimmen.

3+1,5 Punkte

**Aufgabe 15.** Führen Sie ausgehend von den Startwerten

$$x_1^{(0)} = 1, \quad x_2^{(0)} = 1,$$

einen Schritt des Newton-Verfahrens zwecks Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1^3 - 3x_2^2 &= -1 \\ 3x_1^2 - 4x_2^3 &= 1 \end{aligned}$$

aus.

2 Punkte