Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie Rang, Kern und Bild der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1,5 + 1,5 Punkte

Aufgabe 2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

für die bekannt ist, dass ein Eigenwert gleich 1 ist.

(a) Berechnen Sie die übrigen Eigenwerte von A sowie den zum Eigenwert 1 zugehörigen Eigenvektor.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

(d) Geben Sie die Eigenwerte von

$$(3E - A) \cdot (2E - A) + E$$

an. Dabei bezeichnet E die 3×3 Einheitsmatrix.

2 + 0,5 + 0,5 + 1 Punkte

Aufgabe 3. Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

Zeigen Sie dass f in den Punkt $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar ist.

2 Punkte

Aufgabe 4. Bestimmen Sie jeweils die Jacobimatrix.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{-x^2+\sin(z)} \\ \cos(xy) \\ \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) \end{pmatrix}$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, g(x, y) = \begin{pmatrix} xe^y \\ x + y \\ \frac{1}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix}$

1,5 + 1,5 Punkte

Aufgabe 5. Wir betrachten das Gleichungensystem

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \sin(x+y+z) &= 0, \\ x^2+y-z &= 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P})$ in der Nähe von $(x,y,z) = (0,0,0)$ eindeutig nach (y,z) auflösbar ist, d.h. es gibt ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und zwei Funktionen $y(x), z(x)$ die $(\mathcal{P})$ für alle $x \in I$ lösen.

(b) Bestimmen Sie $y'(0)$ und $z'(0)$.

2+1 Punkte

Aufgabe 6. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{2y(t) + (y(t))^2}{t}, \quad y(1) = 2.$$

3 Punkte

Aufgabe 7. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

3 Punkte

Aufgabe 8. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 2x + 3y + 4z$. Bestimmen Sie die globalen Extrema von f in der Kugel $K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\right\}$.

4 Punkte

Aufgabe 9. Sei $w := \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$. Es wird behauptet, dass die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \;\approx\; \frac{2w-1}{2w} f(0) + \frac{1}{2w} f(w)$$

Polynome vom Höchstgrad 4 exakt integriert. Beweisen oder widerlegen Sie die Behauptung. 3 Punkte

Aufgabe 10. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

soll mit Hilfe der zusammengesetzten Simpsonregel mit konstanter Schrittweite h approximiert werden. Wie groß ist h zu wählen damit der Fehler der Approximation kleiner als 10^{-3} wird?

4 Punkte

Aufgabe 11. Anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ werde das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst. Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

in der Maximumsnorm an, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

2 Punkte

Aufgabe 12. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein $x^* \in \mathbb{R}^2$ das $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$ minimiert.

3 Punkte

Aufgabe 13. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -11 \\ 0 & -11 & 130 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine linke untere Dreiecksmatrix L und eine rechte Dreiecksmatrix R mit $A = L \cdot R$. 3 Punkte

Aufgabe 14. Die Daten

x_i	-1	0	1	2	4
y_i	-2.8	0.2	1.0	0.0	-7.7

sollen mit Hilfe des Ansatzes

$$y(x) = ax + bx^2$$

im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate möglichst gut approximiert werden. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem und geben Sie die zugehörige Normalengleichung an (nicht lösen!). 3 Punkte

Aufgabe 15. Gegeben seien die Daten

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	-7	-6	-1	8

Bestimmen Sie ein Polynom p_3 vom Höchstgrad 3, so dass

$$p_3(x_i) = y_i, \quad i = 0 \ldots 3$$

gilt. 3 Punkte

Aufgabe 16. Gegeben sei die Funktion $\phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\phi(x,y) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x^2 e^{-y^2} + 3 \\ \sin(x) + \frac{1}{1+y} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass ϕ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ kontrahierend ist mit der Kontraktionszahl $L \leq 0.75$.

(b) Nehmen Sie an, dass ϕ die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Geben Sie eine obere Schranke für die Anzahl der Iterationen an, die man höchstens benötigt, um die Lösung (x^*, y^*) der Fixpunktgleichung $(x^*, y^*) = \phi(x^0, y^0)$ ausgehend von $(x^0, y^0) = (0,0)$ bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 10^{-5}$ zu bestimmen.

3+1 Punkte