Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y - 7z \\ -2y - 2z \\ -2x - 5y + 13z \end{pmatrix}$ für alle $(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Basis für den Kern von f.

(b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen für das Bild von f.

(c) Ist der Vektor $b = (1, 0, -1)^\top$ ein Element des Bildes von f?

4 Punkte

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 3\pi x - \cos(\frac{\pi}{2}x)$.

(a) Zeigen Sie, daß f im Intervall $I = [0, 1]$ genau eine Nullstelle $x^* \in I$ besitzt.

(b) Formulieren Sie das Problem als Fixpunktproblem und geben Sie eine Iteration an, die gegen die Nullstelle konvergiert. Geben Sie den Startwert und die Iterationsvorschrift explizit an.

(c) Ausgehend vom Startwert x_0 haben Sie nach einem Schritt der Fixpunktiteration die Approximation x^1 mit $|x^1 - x^0| = 10^{-5}$ bestimmt. Welchen absoluten Fehler der Approximation x^1 können Sie garantieren?

4 Punkte

Aufgabe 3. Berechnen Sie für $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 6 & -17 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ein komplexes und ein reelles Fundamentalsystem.

5 Punkte

Aufgabe 4. Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) := (x^2 y, x\cos y), \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) := xy, \\ h &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h := g \circ f. \end{aligned}$$

Verwenden Sie die Kettenregel, um die Ableitung von h zu berechnen.

3 Punkte

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$ye^x + xe^y = 0$$

im Punkt $(0,0)$ lokal nach y aufgelöst werden kann und bestimmen Sie die erste Ableitung der Auflösung im Punkt $x = 0$. Welcher Satz garantiert die Auflösbarkeit?

4 Punkte

Aufgabe 6. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \sin(x) + \frac{x\cos(x)}{\pi}$$

und die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

(a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in Newton-Darstellung.

(b) Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\max_{x\in[x_0,x_2]} |f(x) - P(f|x_0, x_1, x_2)(x)|$ möglichst genau ab.

Hinweis: Für $w(x) := x(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})$ gilt $\max_{x\in[x_0,x_2]} |w(x)| \approx 8.19 < \frac{41}{5}$.

4 Punkte

Aufgabe 7. (a) Berechnen Sie $\int_0^1 x^2 dx$ näherungsweise mit (i) der zusammengesetzten linksseitigen Rechtecksregel, (ii) der Trapezregel und Schrittweiten $h = 2^{-i}$, $i = 0, 1, 2$.

(b) Finden Sie für beide Verfahren eine Abschätzung des Fehlers und verifizieren Sie die Beobachtung aus (a).

(c) Wieviele Teilintervalle müssen bei (i) und (ii) in etwa gewählt werden, um den Fehler kleiner als 10^{-6} zu machen.

5 Punkte

Aufgabe 8. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ -6 & 21 & -3 \\ 18 & -3 & 37 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Berechnen Sie mit dem Cholesky-Verfahren die Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie L und D explizit an. Ist die Matrix A positiv definit?

(b) Ermitteln Sie die Determinante von A.

(c) Lösen Sie mit Aufgabenteil (a) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

6 Punkte